TALLER DE ESTADÍSTICA

5. SIMULACIÓN, TABLAS DE CONTINGENCIA, ÁRBOLES Y DECISIONES.

MAURICIO CONTRERAS

ANÁLISIS DE JUEGOS DE AZAR EN ESO Y BACHILLERATO

Introducción

Históricamente el cálculo de probabilidades nace a partir del estudio de algunos juegos de azar, con Pascal y Fermat. El hito más importante es el intento de resolución, por parte de estos dos matemáticos, del denominado problema del caballero de Mère:

"Dos jugadores participan en un juego en el que el primero que gane 5 partidas recibirá el total de la apuesta. Cada uno ha apostado la misma cantidad: 16 doblones de oro. Cuando A va ganando a B por 3 partidas a 2 se interrumpe el juego por razones de fuerza mayor y ya no será reanudado. ¿Cómo deben repartirse la apuesta?".

La abundante correspondencia entre Pascal y Fermat sobre este problema reveló dos enfoques muy distintos cuya confrontación dio origen al actual cálculo de probabilidades. El análisis de los juegos de azar es importante, ya que sin ellos no podría haberse desarrollado esta parte de las matemáticas. Los conceptos de juego, azar y sorteo aleatorio están estrechamente relacionados. En la actualidad la teoría de juegos tiene una gran influencia en las ciencias sociales (Economía, Ciencias Políticas, Psicología, etc).

En las siguientes actividades analizaremos algunos juegos de azar conocidos y las posibilidades que ofrecen diversos materiales de azar para el estudio de juegos en la ESO y el Bachillerato.

1.– Juegos de azar con dados, monedas, ruletas y urnas.

- **UN JUEGO**

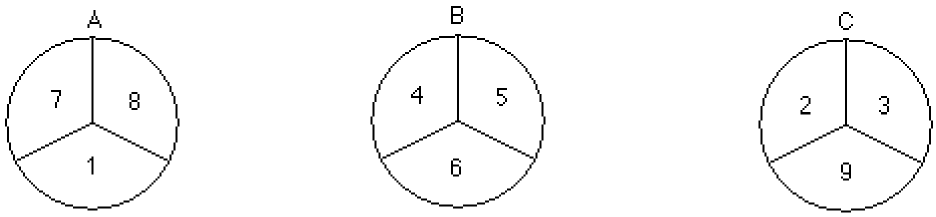
En las caras de un dado figuran los números 1, 2 y 3; en dos caras el 1, el 2 en otras dos y en las dos restantes el 3. ¿Todas las caras son igualmente probables?.

Realizamos el siguiente juego: tiramos el dado; si sale 3, ganamos; si sale 1 ó 2, continuamos jugando hasta repetir el resultado de la primera tirada, en cuyo caso ganamos, o hasta obtener 3 y entonces perdemos. ¿Qué probabilidades tenemos de ganar?.

En la resolución ayúdate de un diagrama de árbol, escribiendo las jugadas en las que ganas.

- **TRES RULETAS**

Este es un juego para dos jugadores.



El primer jugador elige una ruleta. El segundo elige una de las dos que quedan. Cada jugador hace girar su ruleta y gana quien obtenga mayor puntuación.

¿Qué jugador prefieres ser, el primero o el segundo?. ¿Hay una ruleta que sea la mejor de las tres?.

- **LA TRAVESÍA DEL RÍO**

Es un juego para dos jugadores. Material: 12 fichas de cada color para cada jugador. Dos dados cúbicos.

Cada jugador tiene 12 fichas que sitúa en su lado del río. En cada casilla, puede poner tantas fichas como quiera.

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Los jugadores van lanzando los dos dados por turno. Si la suma de los números obtenidos coincide con el número de una casilla en la que tiene colocadas fichas, puede pasar una de esas fichas al otro lado del río. Gana el primer jugador que pasa al otro lado todas sus fichas.

Juega varias partidas con un compañero y analiza el juego. ¿Cuál es la mejor manera de distribuir las fichas?. ¿Qué estrategia utilizarías para ganar?.

- **OTRAS TRES RULETAS**

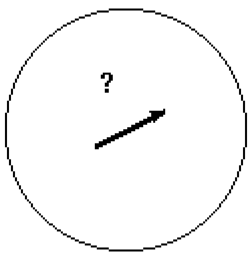
Disponemos de tres ruletas, A, B y C; cada una de ellas dividida en 32 sectores iguales, con distintos puntos:

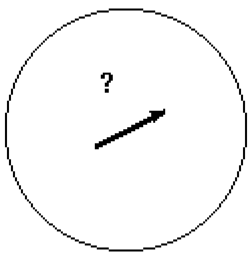
A: 7 sectores con la cifra 6 y 25 sectores con la cifra 3.

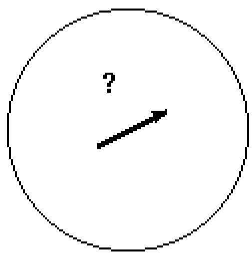
B: 16 sectores con la cifra 5 y 16 sectores con la cifra 2.

C: 25 sectores con la cifra 4 y 7 sectores con la cifra 1.

Dos jugadores escogen una ruleta cada uno. Gana quien obtenga mayor puntuación con su ruleta. ¿Quién tiene ventaja al elegir ruleta, el primero o el segundo?.







- **RULETA BINARIA**

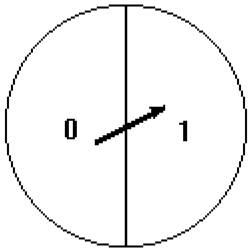
Una ruleta con dos sectores iguales se llama "ruleta binaria". Si está bien construida, ambos sectores tienen la misma probabilidad de salir.

Si jugáis dos compañeros, apostando uno al 0 y otro al 1, y si el primero apuesta dos euros, ¿cuánto debe apostar el segundo para que el juego sea justo?. ¿En qué relación deben estar las apuestas?.

Si cada jugador hace girar dos ruletas binarias, ¿cuáles son los resultados posibles?. Si un jugador apuesto por el resultado 00 y el otro por "saldrán dos números diferentes", ¿crees que ambos tienen la misma probabilidad de ganar?. ¿En qué proporción deben apostar para que el juego sea justo?.

Escribe los resultados posibles con tres ruletas binarias. ¿Por cuál de los resultados siguientes apostarías?.

- "Saldrán tres ceros".
- "Saldrán dos ceros y un uno".
- "Saldrán dos unos y un cero".
- "Saldrán tres unos".



- **LETRAS AL AZAR**

a) En una urna tenemos dos bolas, una con la letra P y otra con la letra I. Extraemos al azar, sin mirar, una bola de la urna, anotamos su letra, la devolvemos a la urna y volvemos a extraer una segunda bola. ¿Es fácil que obtengamos la palabra PI?.

b) Dispones de una urna con tres bolas. Una contiene la letra A, otra la I y otra la R. Al igual que antes, extraemos al azar las bolas, anotamos su letra y las devolvemos, una tras otra, hasta obtener una palabra de tres letras. ¿Es muy fácil que obtengas la palabra IRA?.

c) Dispones ahora de una urna con cuatro bolas que tienen cada una las letras C, O, O, R, respectivamente. ¿Es muy fácil que al ordenarlas al azar obtengas la palabra CORO?.

- **MONEDAS**

Al lanzar una moneda se puede obtener cara o cruz.

a) Si lanzas la moneda dos veces, ¿qué resultados puedes obtener?.

b) ¿Y si se lanza tres veces la moneda?. Si juegas con un compañero, ¿qué resultado apostarías?.

- **APUESTAS**

Vamos a lanzar una moneda. Si sale par, ganas tu, si no gana el contrario.

¿Cómo deben ser las apuestas?.

¿Cuántas tiradas tendrás que esperar para ganar?.

Simula 60 lanzamientos de una moneda. Estudia la serie obtenida.

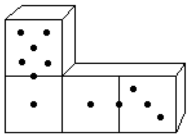
Ahora apuestas a que te saldrá una cara al menos en 2 lanzamientos. Y tu contrario a que no. ¿Es justo que tu contrario apueste lo mismo que tú?.

- **UNO Y DOS**

En el juego del "uno y dos", Juan gana si obtiene una cara y dos cruces, en cualquier orden, al hacer un lanzamiento de tres monedas. ¿Qué probabilidad tiene Juan de ganar?.

- **<u>DOMINÓ</u>**

El dominó consta de 28 fichas, cada una de las cuales está dividida en dos partes, como se indica en la siguiente figura. En cada una de las partes va marcado un punto, dos, tres, cuatro, cinco, seis o ninguno.



Una ficha puede juntarse con otra si alguna de sus dos partes tiene el mismo número de puntos, como se indica en la figura.

Aquél que logra colocar antes las fichas o se queda con una suma de puntos menor, cuando ya no es posible seguir juntando fichas, es el ganador.

Si extraemos una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda ficha extraída pueda juntarse a la primera?.

2.– Juegos de azar clásicos: ruleta, lotería, etc.

- **<u>LA RULETA</u>**

La ruleta ha sido la reina de todos los juegos de azar, provocando ruinas y riquezas, pasiones o al menos distracción. Aquí tienes una historia que ocurrió en el Casino de Monte Carlo a principios del siglo XX ("Las estructuras del azar", Jean Louis Boursin, Ed. Martínez Roca).

"Un ingeniero escocés llamado William Jaggers había examinado con mucho cuidado la forma en que la ruleta estaba construida: observó que el pivote estaba constituido por un cilindro de acero que tenía en su parte superior una concavidad dentro de la cual se encontraba una clavija. Un desgaste imperceptible de esta clavija desequilibraba la ruleta y debido a esto se rompe la igualdad de las probabilidades de los distintos números.

Durante más de un mes, con la ayuda de varios amigos, anotó los números que salían en todas las mesas del Casino de Monte Carlo; por el examen atento de estas listas, Jaggers observó que en una de las mesas ciertos números parecían salir con una frecuencia anormal: sólo faltaba pasar a la acción.

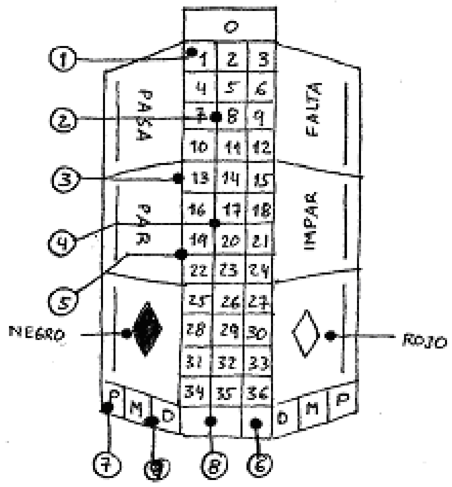
En cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos (de 1900, claro), convirtiéndose de golpe y porrazo en objeto de la atención general. La dirección del Casino perdió más, porque numerosos jugadores comenzaron a apostar como Jaggers; se sospechó que hacía trampas, se le vigiló con tanto cuidado como asiduidad, pero todo en vano.

El Director del Casino hizo entonces anotar los números a los cuales apostaba Jaggers, y una noche, después de cerrar las salas, comprobó que jugando a esos números se ganaba rápidamente. Hizo cambiar entonces la ruleta de mesa y al día siguiente Jaggers comenzó a perder; comprendió bastante pronto la maniobra de la dirección y, cesando de jugar, diose una vuelta por la sala de juego. Por algunos defectos imperceptibles, su vista ejercitada le permitió descubrir "su" ruleta: comenzó a jugar de nuevo y a ganar.

El problema iba haciéndose angustioso para el Casino, porque Jaggers no hacía nada ilegal. Envió a uno de los directores a Estrasburgo, a la casa del fabricante de ruletas para pedirle consejo. Este sugirió que cada día cambiase las separaciones entre los agujeros de la ruleta: las desigualdades de estas separaciones habrían de compensar las de la ruleta misma.

Jaggers comprendió rápidamente lo que ocurría y con muy buen tino dejó de jugar; sin embargo se llevó más de un millón de francos de ganancia."

La ruleta europea dispone de 37 números, del 0 al 36. Los premios a las apuestas posibles se describen a continuación.



PRODUCTO DE LAS POSTURAS GANADORAS

(1)	PLENO	1 número	35 veces in postura
(2)	CABALLO	2 "	17 " "
(3)	FILA TRANSVERSAL DE 3 NÚMEROS	3 "	11 " "
(4)	CUADRO	4 "	8 " "
(5)	SEISENA DE 6 NÚMEROS	6 "	5 " "
(6)	COLUMNA	12 "	2 " "
(7)	DOCENA	12 "	2 " "
(8)	2 COLUMNAS	24 "	1/2 " "
(9)	2 DOCENAS	24 "	1/2 " "
(10)	SUERTES SENCILLAS	18 "	1 " "

Las Suertes Sencillas son: Rojo y Negro, Falta y Pasa, Pares y Nones.

APUESTAS CON VARIOS NÚMEROS AL MISMO TIEMPO

LOS VECINOS DEL CERO: 9 fichas 0–2–3, 4–7, 12–15, 18–21, 19–22, 25–29, 32–35 (Las fichas sobre 0–2–3 y 25–29 son dobladas)
LA TERCERA PARTE DEL CILINDRO: 6 fichas 5–8, 10–11, 13–16, 23–24, 27–30, 33–36
LOS HUERFANOS 1, 6, 9, 14, 17, 20, 31, 34 = 8 fichas

Cuando sale el Cero, las posturas de suertes iguales quedan encerradas, o pierden la mitad de su valor. A la bolada siguiente, las posturas encerradas,

- si ganan, vuelven a contar para la jugada siguiente.
- si pierden, son recogidas.

a) Te proponemos que estudies los premios y justifiques si crees que son o no justos.

b) Calcula la probabilidad de que salga rojo y la probabilidad de que salga negro.

c) Sin realizar cálculos decide en qué caso de los dos que siguen existe más probabilidad de ganar: apostando que la bola caerá en el sector A (formado por los números 25, 17, 34, 6, 27, 13, 36, 11, 30), o que caerá en alguno de los sectores C (números 12, 28, 7, 29, 18) y D (números 16, 33, 1, 20). Calcula después dichas probabilidades.

Hay muchas estrategias para jugar a la ruleta. En las librerías de Monte Carlo venden sistemas para ganar "2500 francos por semana garantizados", pero la garantía es vana. Una de ellas es esta:

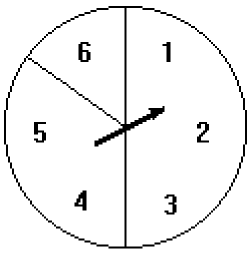
"Apuesto a un número 50 euros. Si gano, me retiro; si no apuesto el doble, 100 euros, al mismo número. Si gano, habré recuperado los 50 euros perdidos y habré ganado 50. Si pierdo, apostaré 200 euros…"

¿Te parece buena la estrategia anterior?. Imagina otras estrategias para jugar con tu dinero en un casino.

- **<u>EL FERIANTE</u>**

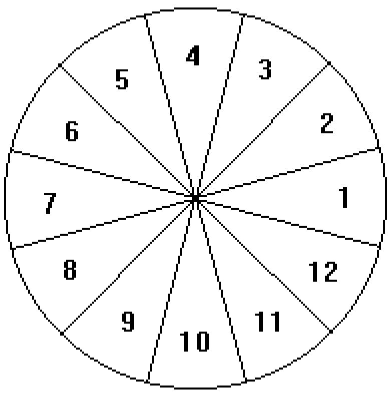
Un feriante invita a jugar con su ruleta por el módico precio de 8 euros por partida. Si la aguja cae en cualquiera de los sectores 1–2–3, entonces paga 4 euros; si cae en los sectores 4–5, paga 6 euros y si cae en el sector 6 paga 12 euros. ¿Crees que es fácil que el feriante se arruine?.

Podéis jugar dos compañeros, uno haciendo de feriante y el otro de cliente, y observar lo que ocurre en varias partidas – unas 20, por ejemplo –, apuntando los resultados.



- **<u>RULETA DE 12 PARTES</u>**

En la ruleta de la siguiente figura los sectores 1, 4, 7 y 10 son rojos, los sectores 2, 5 y 11 son verdes y el resto son blancos.



Si hacemos girar la ruleta cien veces, di cuántas veces podemos esperar que salga:

- rojo
- blanco o gris
- divisor de 12
- número impar
- múltiplo de 3
- múltiplo de 4
- número par o rojo
- número par y rojo
- rojo y divisor de 6
- blanco y menor que 3.

- **LOTERÍA PRIMITIVA**

Cuando rellenas un boleto de lotería primitiva, señalas 6 de los 49 números. Al realizar el sorteo se extraen 6 bolas numeradas de una urna con 49 bolas numeradas. Además se extrae otra bola, llamada número complementario y una tercera bola que es el reintegro.

a) ¿Cuántas apuestas diferentes podrías hacer?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar los seis números?

c) ¿Y la de acertar cinco de los seis números y el complementario?.

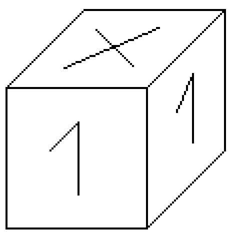
d) Estudia diferentes posiciones geométricas de las apuestas. ¿Piensas que alguna de ellas tiene ventaja, o por el contrario, todas tienen las mismas posibilidades de salir?.

- **LOTERÍA LOCAL**

En una lotería local se venden 100 billetes a 1 euro y hay 7 premios de 10 euros cada uno. ¿Te conviene participar en este juego?. ¿Qué cantidad de dinero esperas ganar si compras un billete?.

- **QUINIELAS**

En el mercado existen dados para rellenar quinielas al azar. Obsérvalos. ¿Crees que la distribución 1, X, 2 es la apropiada?.



En las tablas que siguen se dan los resultados obtenidos durante una temporada futbolística. Te ayudarán sin duda a precisar tus opiniones.

Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	4	9	11	10	8	9	10	8	9	5	9
X	4	3	2	2	4	4	4	4	5	6	3
2	6	2	1	2	2	1	0	2	0	3	2

Jornada	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	5	7	4	7	6	8	6	7	7	4	6
X	6	5	9	3	4	2	7	4	5	6	6
2	3	2	1	4	4	4	1	3	2	4	2

Jornada	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	6	9	4	8	6	7	7	10	5	5	8
X	4	2	6	3	4	2	2	1	8	7	4
2	4	3	4	3	4	5	5	3	1	2	2

Jornada	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
1	6	7	8	5	5	8	4	7	5	8	7
X	6	5	4	6	4	4	9	4	6	6	6
2	2	2	2	3	5	2	1	3	3	0	1

El quinielómetro, ordenador de los pobres, es una especie de sonajero que al agitarlo produce una nueva quiniela (15 resultados).

1	**2**	**1**	**X**	**2**	**1**	**1**	**X**	**1**	**1**	**X**	**1**	**1**	**X**	**2**

- ¿Cuántas quinielas se pueden hacer?.
- ¿Cuántas quinielas se pueden hacer con un partido fijo?.
- ¿Y con dos partidos fijos?.
- ¿Y si apostamos por tres partidos fijos?.
- ¿Y cuatro?. ¿Y cinco?.

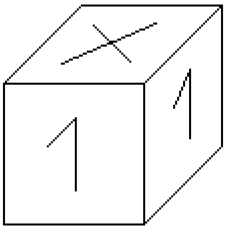
Utiliza un dado de hacer quinielas para construir una quiniela. Cuenta el número de unos, equis y doses. Recoge la información obtenida en tu clase. Construye una tabla de frecuencias como la siguiente:

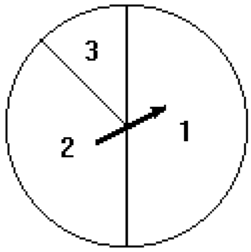
RESULTADO	RECUENTO	FRECUENCIA
1		
X		
2		

Compara los resultados obtenidos en tu clase con la proporción entre unos, equis y doses de una quiniela real.

- **RULETAS Y DADOS**

Con cartulina y agujas puedes construir ruletas equivalentes a dados, que te pueden servir para realizar sorteos si no dispones de dados apropiados (más difíciles de construir que las ruletas).





Construye plantillas de ruletas equivalentes a dados en cada uno de los casos siguientes:

- Un dado cúbico con un 1 en dos de sus caras, una X en otras dos y un 2 en las otras restantes.
- Ídem con un 1 en tres de sus caras, una X en dos caras y un 2 en la restante.
- Un dado icosaédrico (20 caras) con un 0 en quince de sus caras y un 1 en las otras cinco.
- Un dado icosaédrico con un 1 en diez de sus caras, una X en ocho y un 2 en las otras dos.

Ordena de menor a mayor facilidad los casos en los que puede aparecer una X.

3.– Juegos equitativos y no equitativos. Esperanza matemática.

- **MONEDAS**

a) Un jugador, A, apuesta por la obtención de "al menos una cara en dos lanzamientos de una moneda" contra otro B, que apuesta por lo contrario. ¿En qué proporción han de efectuarse las apuestas para que el juego sea justo?.

b) Se lanzan dos monedas. Se admiten tres tipos de apuestas:

   * En ambas aparece cara.
   * En ambas aparece cruz.
   * Son distintos los resultados de ambas.

   ¿Tu apuesta?.

- **TRES DADOS**

Vamos a lanzar tres dados cúbicos. ¿Es justo que el que apuesta por la aparición de "suma de puntos 10", ponga el mismo dinero que el que apuesta por la aparición de "suma de puntos 9"?.

- **<u>LA PARTIDA INTERRUMPIDA</u>**

Dos jugadores A y B han apostado 32 monedas cada uno en un juego de “cara” y “cruz”, en el que el primero que gane cinco veces se quedará con las 64 monedas. Cuando A va ganando por 4 a 3 a B, la partida se interrumpe por causas ajenas a ellos y ya no será reanudada. ¿Cuál es el reparto más justo del dinero?.

- **<u>DADOS NO TRANSITIVOS</u>**

Construye cuatro dados como los de la figura:

	0			3			2			5	
4	0	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1
	4			3			6			5	
	4			3			6			5	

Te proponemos el siguiente juego con ellos: El primer jugador elige un dado. El segundo elige uno de los tres que quedan. Cada uno lanza su dado y gana quien obtenga mayor puntuación. ¿Qué jugador prefieres ser, el primero o el segundo?.

- **<u>DOBLE SEIS</u>**

Se sabe que es ventajoso apostar por la aparición de “al menos un seis en cuatro lanzamientos sucesivos de un dado cúbico”. ¿A cuántos lanzamientos es ventajoso apostar por la obtención de un doble seis con dos dados?.

- **<u>AL MENOS UN SEIS</u>**

a) Se dice que es ventajoso apostar por “al menos un seis en 4 lanzamientos de un dado cúbico” una cantidad igual contra otra igual. ¿Estás tú de acuerdo?.

b) Intenta descubrir a cuántos lanzamientos de un dado octaédrico es ventajoso apostar por la obtención de al menos un seis.

- **<u>AL MENOS UN DOBLE SEIS</u>**

¿A partir de cuántos lanzamientos de dos dados cúbicos es ventajoso apostar por la aparición de “al menos un doble seis”?.

- **<u>JUEGOS CON APUESTAS</u>**

a) Julio y Marisa están practicando el siguiente juego: Lanzan un dado. Si sale número primo, gana Julio; si sale 6, gana Marisa. Si Julio apuesta 10 euros, ¿qué cantidad debería apostar Marisa?.

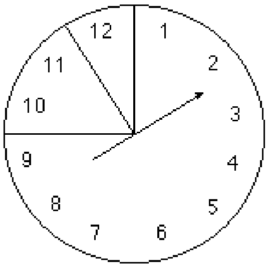
b) Carmen y Paco juegan a extraer al azar una carta de una baraja. Si sale figura, gana Paco. Si sale un número del 2 al 7, ambos incluidos, gana Carmen. Carmen apuesta 15 euros. ¿Cuánto debe apostar Paco?.

- **<u>¿ES JUSTO EL JUEGO</u>?**

Una ruleta está dividida en 12 sectores iguales. Considera tres sectores de tal ruleta: el A, con los sectores numerados del 1 al 9; el B, los numerados con 10 y 11; el C, con el sector 12.

Te proponen el siguiente juego: si la aguja señala uno de los sectores de A, entonces pagas 50 euros; si señala uno de los sectores de B, ganas 100 euros y si marca el sector C ganas 200.

¿Te conviene jugar?. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 60 jugadas?.



Utiliza un dado dodecaédrico para simular la ruleta. Efectúa 30 simulaciones del juego con ayuda de tus compañeros de grupo y recoge los resultados de la clase en una tabla como la siguiente:

	Pierde 50	Gana 100	Gana 200	
Grupo 1				
Grupo 2				
....				Total

Utiliza esta tabla para calcular la ganancia media y extraer conclusiones.

Dada una tabla de probabilidades como la siguiente:

Valores	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n	*Total*
Frecuencia	f_1	f_2	f_3	f_4	...	f_n	N

podemos construir una tabla de probabilidades como la siguiente:

Valores	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
Probabilidad	p_1	p_2	p_3	p_4	...	p_n

donde $p_i = \dfrac{f_i}{N}$ *para cada valor de i. Entonces, la esperanza matemática de los valores* x_i *se calcula por la fórmula:* $E(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + ... + x_n \cdot p_n$

o bien por esta otra: $E(x) = \dfrac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + ... + x_n \cdot f_n}{N}$

- **<u>TORNEO DE AJEDREZ</u>**

A una jugadora de ajedrez se le propone jugar, en un torneo, contra otro jugador al que se le supone el mismo grado de habilidad. El torneo es a tres partidas. Por cada partida ganada reciben 500 euros. ¿Cuál es la ganancia que puede esperar?. Si asistir al torneo le cuesta 400 euros, ¿le conviene participar?.

SIMULACIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS EN ESO Y BACHILLERATO

Introducción

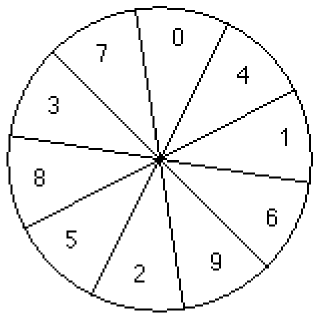
Otro concepto, relacionado con los juegos, es el de simulación, que consiste en generar una colección de números aleatorios, obtenidos por sorteo, de forma que se simulen las condiciones reales del proceso en estudio. Al efectuar un número suficientemente alto de simulaciones se obtiene una serie de frecuencias, que puede estudiarse estadísticamente. El análisis de los datos obtenidos permite hacer hipótesis y extraer conclusiones sobre el proceso simulado. Esta técnica, conocida como método de Monte Carlo, es utilizada cada vez con mayor frecuencia en las ciencias, especialmente porque los ordenadores facilitan la tarea de generar datos y analizarlos.

En las siguientes actividades analizaremos las posibilidades que ofrecen diversos materiales de azar para generar series aleatorias, generaremos números aleatorios por diversas técnicas (incluyendo la calculadora científica y gráfica) y utilizaremos la simulación para resolver problemas difíciles de probabilidad y analizar la evolución de algunos procesos.

1.– Generación de números aleatorios.

- **<u>NÚMEROS ALEATORIOS</u>**

Al aumentar el tamaño de una muestra, obtenemos una información mayor y más precisa sobre la población de procedencia. Pero no siempre es posible obtener una muestra de gran tamaño, por razones económicas y de tiempo. En estos casos se recurre a la simulación.



Con un dispositivo electrónico parecido a una ruleta decimal se generaron hasta un millón de dígitos que aparecieron en 1955 en un libro titulado "Un millón de dígitos al azar".

Una tabla de números aleatorios es una colección de dígitos que se han obtenido por este procedimiento (o por otros equivalentes, como por ejemplo, por medio de urnas y bolas, dados decimales, etc).

Los dígitos están organizados en grupos de cinco cifras. Para usar la tabla, elegimos un dígito de partida y leemos los números a partir de él. La lectura puede hacerse en cualquier orden: verticalmente, horizontalmente, en diagonal.

Con la tabla de números aleatorios podemos simular cualquier sorteo. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda es equivalente a leer los dígitos de la tabla: si sale cifra par, convenimos que ha salido cara; si sale impar, cruz. Así, si leemos la tabla desde el principio, en dirección horizontal, obtenemos:

6 9 9 3 4 1 1 8 3 2 ... que equivale a C X X X C X X C X C ...

siendo C=cara y X=cruz. Estos resultados cambian si leemos la tabla de otra forma.

Otro ejemplo: para sortear 5 premios entre 50 personas, asignamos un número a cada una de las 50 personas y, a continuación, tomamos tiras de dos cifras de la tabla (hasta obtener en total cinco tiras válidas), admitiendo como válidos los números 01, 02, 03, 04, ..., 50 y rechazando los números que pasan de 50. Así, si leemos la tabla desde el principio, en dirección vertical, obtenemos:

69 93 41 18 32 89 47 20 15 11

Las personas afortunadas son las que tienen por números de orden 41, 18, 32, 47 y 20. Lógicamente el sorteo podría haber tenido otro resultado si hubiésemos leído la tabla de una manera diferente.

TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS

69934	11832	89472	01511	41360	84715	49120	26790	08559	25160	18426
76466	61199	22419	87950	46848	12384	85396	16741	94095	91090	75959
62502	95860	29786	72762	38863	87256	65570	66671	13341	82826	79686
39780	12133	26817	35323	16719	73582	72136	39386	50498	36051	55362
23916	79159	42656	10689	14997	42997	53668	66937	61441	86665	90654
27100	21291	34619	04282	32506	76959	48755	11211	35296	62519	22719
36698	54188	07043	50658	92762	42824	54967	39945	76269	60619	39031
89673	46650	21903	39767	69796	52732	30596	18211	27795	37744	26273
23794	12871	28597	62422	79965	48856	55044	10516	05622	56047	21499
93362	32167	11140	40603	57120	33686	18430	01785	77646	72759	50659
94904	62071	84347	35930	37607	73312	66060	37601	61282	30725	95880
26513	38480	16340	97760	95744	26683	94210	82632	40915	24823	74507
62514	48427	43241	30799	45978	03838	02899	37884	74207	12162	03876
48978	37281	17441	61413	72058	63025	77411	73785	91949	45462	74826
16704	78621	72299	90517	96422	52496	61349	64901	02285	14210	02898

a) Simula con la tabla de números aleatorios 12 lanzamientos de un dado cúbico.

b) Simula con la tabla de números aleatorios 15 lanzamientos de un dado para hacer quinielas (dado cúbico que tiene tres caras marcadas con 1, dos caras marcadas con X y una cara marcada con 2).

c) Simula un sorteo de 10 premios entre 150 personas.

d) Simula 10 repeticiones del experimento consistente en lanzar simultáneamente tres dados cúbicos y construye la correspondiente tabla de frecuencias, anotando el número de "seises" obtenido en cada lanzamiento.

- **GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS CON DADOS**

a) Utilizando un dado decimal (tiene diez caras iguales) construye una tabla de números aleatorios de 100 dígitos, efectuando para ello 100 lanzamientos del dado y anotando los resultados. Cuenta el número de veces que aparece cada dígito y construye la tabla de frecuencias correspondiente.

b) Si unes tus resultados a los de tus compañeros tendrás una tabla con 3000 números aleatorios. Cuenta el número de veces que aparece cada dígito en esta macro-tabla y construye la tabla de frecuencias correspondiente.

c) ¿Cómo podrías construir una tabla de números aleatorios con un dado icosaédrico?. ¿Y con un dado cúbico?. Justifica las respuestas.

- **GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS CON LA CALCULADORA**

*Las calculadoras y los ordenadores permiten obtener de forma rápida y sencilla series de números aleatorios. La mayoría de calculadoras científicas disponen de la función **RAN#**, que se suele activar con la combinación de teclas **SHIFT •** . Cada vez que se activa esta función aparece en pantalla un número aleatorio entre 0 y 1 con un número predeterminado de cifras decimales (generalmente tres decimales). Ignorando el cero inicial y la coma decimal, consideramos los dígitos restantes como una secuencia de números aleatorios que podemos usar de la misma forma que la tabla de números aleatorios. Cada vez que necesitemos más dígitos volveremos a activar la función **RAN#**, hasta obtener la cantidad deseada de cifras. Si necesitamos trabajar con números de una cifra, leemos los dígitos de uno en uno, si necesitamos números aleatorios de dos cifras, los leemos de dos en dos, etc.*

a) ¿Cómo simular con la calculadora un juego con tres resultados posibles, 0, 1 y 2, que tienen como probabilidades respectivas 0’2, 0’5 y 0’3?. Simula en total 20 partidas.

b) Utiliza una calculadora para simular 20 lanzamientos de dos monedas y construye la tabla de frecuencias correspondiente. Extrae conclusiones de la tabla.

c) Una ruleta está dividida en 10 sectores iguales. Dividimos la ruleta en tres trozos: el A, que incluye los sectores 1, 2 y 3; el B, que incluye los sectores del 4 al 8; y el C que incluye los sectores 9 y 0. Simula con la calculadora 50 tiradas de esta ruleta y construye la correspondiente tabla de frecuencias. Comenta los resultados.

- **ROSCÓN DE REYES**

Un grupo de 10 amigos celebran la noche de Reyes cenando en un restaurante que ofrece un menú de 30 euros e incluye el típico roscón de postre.

Al servirles el postre, el camarero les comenta que, precisamente, la pastelería que les suministra tiene la costumbre de mezclar con la pasta de cada roscón diez “sorpresas” diferentes; pero, como la mezcla se hace antes de darle forma, éstas pueden quedar distribuidas de cualquier manera.

Como la distribución de las sorpresas es aleatoria, el grupo de amigos decide jugarse la factura del restaurante de la siguiente forma: el roscón se partirá en diez trozos iguales y cada uno pondrá treinta euros por cada regalo que encuentre en su parte.

¿Es fácil que uno de ellos tenga que pagar la cena de todo el grupo?. ¿Y que cada uno tenga que pagar exactamente su parte?. ¿Cuál es el número, que consideras más probable, de amigos a los que les saldrá gratis la cena?.

¿Cómo puedes simular este problema utilizando un dado o una ruleta decimal?. ¿Y con una tabla de números aleatorios?. ¿Y con la calculadora?. ¿Y con una bolsa opaca que contenga diez bolas o papeles numerados?.

- **GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS CON EL ORDENADOR**

Los ordenadores disponen de la función **RND** (del inglés RANDOM, que significa AZAR). Cuando se activa esta función, el ordenador genera un número aleatorio comprendido entre 0 y 1, de manera uniforme (sin preferencia por alguno de los números del intervalo).

Con esta función es posible simular cualquier situación aleatoria. En efecto, el ordenador también dispone de la función **INT**, que aplicada a un número real cualquiera lo transforma en la parte entera de dicho número. Así: INT(0'345)=0 INT(0'0231)=0 INT(1'892)=1

Si queremos que el ordenador genere sólo 0 y 1, para imitar el lanzamiento de una moneda, basta tomar los números X generados por la función X=INT(2·RND)

Si queremos simular el lanzamiento de un dado, se tomarán los valores generados por la función X=INT(6·RND)+1

- **NÚMEROS ALEATORIOS CON LA CALCULADORA GRÁFICA**

Pulsando MATH ◄ en la TI–83, obtenemos en pantalla el menú PRB, cuya primera función es **rand**. Esta función devuelve un número aleatorio comprendido entre 0 y 1.

Ejemplo 1.- ¿Cómo simular con la calculadora gráfica una serie de 5 lanzamientos de un dado octaédrico?.

Como hay ocho resultados posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) en cada lanzamiento, debemos utilizar la función **int(8*rand)+1**. Para que aparezca en pantalla el resultado de uno de los lanzamientos, pulsamos

MATH ► [4] (MATH ◄ [1] × 8) + 1 ENTER.

Como se trata de cinco lanzamientos, repetiremos el proceso cuatro veces más.

Pero también podemos obtener directamente una lista con los cinco lanzamientos utilizando la función **randInt(** del menú MATH PRB. Su sintaxis es:

randInt(mínimo, máximo, número de pruebas)

En nuestro caso, pulsamos: MATH ◄ [5] 1 , 8 , 5) para obtener en pantalla **randInt(1, 8, 5)**. Al pulsar ENTER obtenemos los cinco lanzamientos.

Ejemplo 2.– Una ruleta está dividida en 37 sectores iguales. Considera tres sectores de tal ruleta: El A, que incluye los sectores numerados del 1 al 21; el B, los numerados del 22 al 35; el C, los numerados 0 y 36. Si el resultado del juego es un número del sector A, pagas 50 cents; si es del B, ganas 50 y si el del C, ganas 150. ¿Te conviene jugar?. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 60 jugadas?. Resuelve el problema por simulación con una calculadora científica y con la calculadora gráfica.

a) Con la calculadora científica, usamos la función RAN# para generar una tabla de 60 números aleatorios de dos cifras comprendidos entre 00, 01, 02, ..., 36 rechazando aquellos números de dos cifras que no estén entre los anteriores. Si el número está entre 01 y 21, ha salido el sector A; si el número está entre 22 y 35, ha salido el sector B y si sale el 00 o el 36, ha salido el sector C.

b) Con la calculadora gráfica TI–83, utilizamos la función randInt(1, 36, 60). Si el número obtenido está entre 01 y 21, sale el sector A; si el resultado está entre 22 y 35, sale B y si se obtiene 0 ó 36, sale el sector C.

Posteriormente construimos una tabla de frecuencias y hallamos la esperanza (o media) de la variable.

Teniendo en cuenta que p(A)=21 / 37, p(B)=14 / 37, p(C)=2 / 37, la ganancia teórica media por partida es:

$$G_m = -50\times\frac{21}{37}+50\times\frac{14}{37}+150\times\frac{2}{37}=\frac{-50}{37}=-1'3513514 \text{ céntimos.}$$

Luego en 60 partidas debemos perder, por término medio 81’081081 ≈ 81 céntimos. No parece conveniente jugar.

ACTIVIDADES

- **DADOS**

a) Simula con la calculadora gráfica 12 lanzamientos de un dado cúbico.

b) Simula con la calculadora gráfica 15 lanzamientos de un dado para hacer quinielas (dado cúbico que tiene tres caras marcadas con 1, dos caras marcadas con X y una cada marcada con 2).

c) Simula 10 repeticiones del experimento consistente en lanzar simultáneamente tres dados cúbicos y construye la correspondiente tabla de frecuencias, anotando el número de “seises” obtenido en cada lanzamiento.

- **SORTEOS**

a) Simula un sorteo de 10 premios entre 150 personas. ¿Qué probabilidad tiene cada persona de ganar algún premio?.

b) En una rifa de 1000 números se van a sortear un total de ocho premios. Simula este sorteo con la calculadora gráfica. Si solamente hemos comprado un número de esta rifa, ¿qué probabilidad tenemos de ganar algún premio?.

- **PRUEBAS DE ALEATORIEDAD**

Estudiemos algunas propiedades de la tabla de números aleatorios:

∗ La probabilidad de obtener cada cifra es 0’10. Cada cifra debe aparecer con una frecuencia relativa aproximada de 0’1.

∗ Los números pueden leerse agrupados por parejas: 59 39 15 ... Cada uno de los 100 posibles números de 2 cifras tiene una probabilidad de 0'01. Cada pareja debe aparecer en la tabla con una frecuencia relativa próxima a 0'01.

∗ Se toman números de cuatro cifras: 5939 1580 ... Cada uno de los 10000 posibles números tiene la probabilidad de 0'0001. Cada número de cuatro cifras debe aparecer en la tabla con una frecuencia relativa cercana a 0'0001.

- **Verificación de los números aleatorios**

No hay ningún método verdaderamente seguro para construir números aleatorios. Por ello, se necesita verificar el carácter aleatorio de una sucesión de números una vez obtenidos. Una verificación rigurosa la proporciona el llamado **TEST DE POKER**. Consiste en clasificar los números aleatorios en grupos de cinco cifras, agrupándolos en siete clases. Se calculan sus probabilidades y después se comparan con sus frecuencias relativas. Las clases son las siguientes:

CLASE	DESCRIPCIÓN DE LA CLASE	EJEMPLO	PROBABILIDAD DE LA CLASE
abcde	Todas las cifras distintas	34961	0'3024
aabcd	Dos cifras iguales	29512	0'5040
aabbc	Dos pares de cifras iguales	44533	0'1080
aaabc	Tres cifras iguales	60366	0'0720
aaabb	Tres cifras y un par iguales	23223	0'0090
aaaab	Cuatro cifras iguales	29222	0'0045
aaaaa	Cinco cifras iguales	55555	0'0001

a) Genera una serie de 150 dígitos con la calculadora y comprueba si cada dígito sale la décima parte de las veces. Compara la frecuencia relativa de cada dígito con su probabilidad.

Utilizaramos la función **RandInt(** de la calculadora gráfica. Pulsa [STAT] [ENTER] para iniciar el editor de listas estadísticas. Sitúa el cursor sobre el nombre de la lista L_1 y pulsa [CLEAR] para borrar su contenido. Observa que el cursor aparece en la línea de edición.

Pulsa [MATH] [◄] 5 para seleccionar el comando **5: randInt(**. Pulsa 0 [,] 9 [,] 150 [ )]. De esta forma hemos definido la lista L_1 como:

$$\mathbf{L_1 = randInt(\ 0, 9, 150\ )}$$

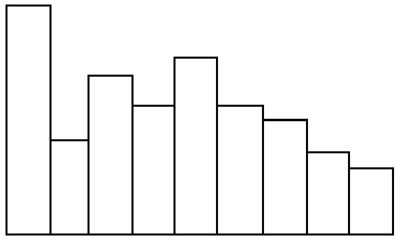
Pulsa [ENTER] y tras unos segundos aparecerá en pantalla la lista L_1 generada. Utiliza las teclas de cursor [▼] y [▲] para comprobar los valores de la lista. De esta forma hemos generado una lista de 150 dígitos aleatorios comprendidos entre 0 y 9.

El problema ahora consiste en contar el número de apariciones de cada dígito, es decir, cómo obtener las frecuencias de cada dígito. Para ello dibujaremos el histograma correspondiente a la lista L_1.

Pulsa [2^{nd}] [STATPLOT] [ENTER] para definir el Plot1. Define este gráfico con las siguientes características:

Activado	On
Type	Histograma
Xlist:	L_1
Freq:	1

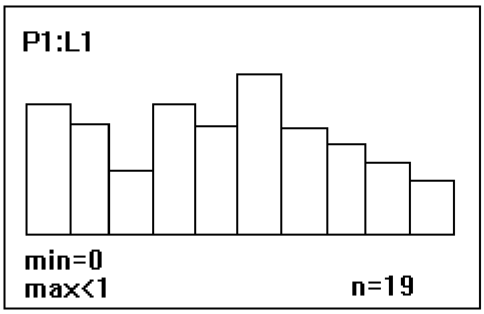
Pulsa [ZOOM] 9 para activar la opción **9: ZoomStat**. Aparece la pantalla gráfica con el histograma. Como pretendemos que se muestren las frecuencias de cada dígito, nos interesa que la escala del eje X sea Xscl = 1. Por tanto, modificaremos los parámetros de ventana.



Pulsa [WINDOW] y establece los siguientes parámetros de ventana gráfica:

Xmin= 0
Xmax= 10
Xscl= 1

Pulsa [GRAPH] y se mostrará de nuevo el histograma, con intervalos de anchura igual a 1. Para ver las frecuencias, pulsa [TRACE] y utiliza las teclas de cursor [▸] [◂]. Con ello se muestran los extremos de cada intervalo y la frecuencia absoluta correspondiente. Si la tabla obtenida es realmente aleatoria, las frecuencias absolutas deben estar próximas a 15 (que es la décima parte de 150).



b) Genera con la calculadora 50 series de 5 dígitos aleatorios y cuenta los números de la forma abcde y aabcd. Compara la frecuencia relativa con la probabilidad (dada en la tabla anterior).

2.– Simulación de procesos aleatorios.

- **<u>IRREVERSIBILIDAD</u>**

En el cielo hay millones y millones de estrellas. En un pequeño volumen de gas hay millones y millones de moléculas... Cada una de ellas está en un instante determinado en un lugar... ¿Volverán a ocupar, <u>todas</u> <u>a la vez</u>, el mismo lugar alguna vez?.

Es una pregunta nada fácil. Para poder fundamentar un poco nuestras opiniones, te proponemos la resolución de un problema similar, pero con números mucho más pequeños.

Dispones de dos cartas con una A dibujada en una de las caras, y una B en la otra.

1) Toma dos cartas y colócalas así:

A	B

Lanza una moneda al aire por cada carta. Si sale cara, coloca la carta correspondiente de forma que muestre el lado A; si sale cruz, el B.

¿Puedes dar una estimación del número de tiradas que tendrías que realizar para volver a la configuración de partida AB ?.

2) Haz lo mismo con 4, 6 y 8 cartas, partiendo respectivamente de las configuraciones:

A	A	B	B

A	A	A	B	B	B

A	A	A	A	B	B	B	B

¿Depende la espera (para volver a la configuración inicial) del número inicial de cartas?. ¿Mucho o poco?.

- **<u>LA COLA DEL CINE</u>**

Delante de la taquilla de un cine hay una cola de 10 personas, 5 de las cuales tienen una moneda de 5 euros, mientras que las 5 restantes tienen cada una de ellas un billete de 10 euros. Una entrada vale 5 euros, y al abrirse la taquilla no había dinero en la caja.

No sabemos cuál es la distribución en la cola de las personas con moneda o billete, y podrían darse varias posibilidades. ¿Qué probabilidad asignarías al hecho de que nadie tenga que esperar por falta de cambio?.

> *Algunos problemas de probabilidad son tan difíciles que es mejor resolverlos experimentalmente. Como la experimentación real es muchas veces imposible se recurre a la <u>simulación</u>. El problema consiste entonces en encontrar la forma adecuada de simular la situación propuesta, es decir, encontrar el <u>modelo</u> que la represente por <u>analogía</u>.*
>
> *Elegido un procedimiento, se procede a experimentar el proceso, obteniendo una cantidad suficiente de datos. A continuación se recogen en una tabla los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas y se utilizan estos datos para asignar una <u>probabilidad</u> al suceso estudiado. La probabilidad asignada al suceso será la <u>frecuencia relativa</u> correspondiente.*

¿Cómo puedes simular este problema utilizando un dado o una ruleta decimal?. ¿Y con una moneda?. ¿Y con una bolsa con diez bolas?.

Con ayuda de tus compañeros de grupo, efectúa 30 simulaciones y recoge la información de toda la clase en una tabla como la siguiente. Extrae conclusiones de la tabla.

	SIN ESPERA	CON ESPERA	TOTAL
Grupo 1			
Grupo 2			
Grupo 3			
....			
Totales			

- **LA LOTO**

La combinación ganadora en la lotería primitiva es una secuencia de seis números obtenidos mediante extracciones sucesivas de una urna que contiene 49 bolas numeradas del 1 al 49.

Un posible resultado sería 6-8-13-20-21-35; en él aparecen dos números consecutivos, el 20 y el 21.

¿Qué crees que es más frecuente en las combinaciones ganadoras:

a) que contengan números consecutivos, o

b) que no aparezcan números consecutivos?.

Simula este problema utilizando la tabla de números aleatorios.

- **PARADOJA DEL CUMPLEAÑOS**

Hay quien preferiría celebrar su "no–cumpleaños" porque es mucho más frecuente que el cumpleaños. Pero justamente por ser menos frecuente, el día del cumpleaños suele ser motivo de alegría.

¿Es muy difícil acertar el día del año que ha nacido una persona?. ¿En qué proporción deberían hacerse las apuestas de acertar contra no acertar para que fuera justo el juego?.

¿Y si apostamos a que dos personas elegidas al azar celebran su cumpleaños el mismo día?.

¿Cuántas personas debe haber reunidas, como mínimo, para que sea ventajoso apostar a que al menos dos de ellas celebran el cumpleaños el mismo día?.

Para responder esta última cuestión puede serte útil la tabla de números aleatorios.

- **MÉTODO DE MONTE CARLO**

La mayoría de los procesos del mundo real son aleatorios. Los procesos reales son tan complicados que está fuera de nuestro alcance poder analizarlos teóricamente. Por ello recurrimos a hacer una simulación, esto es repetimos el proceso un gran número de veces y asignamos como probabilidad la frecuencia relativa.

La simulación utilizando los números aleatorios se denomina **Método de Monte Carlo**. La calculadora gráfica es especialmente útil para realizar simulaciones, porque permite ahorrar tiempo y facilita el análisis de los resultados, permitiendo así abordar problemas prácticos, cuyos modelos probabilísticos teóricos son realmente complicados.

Ejemplo 1.- **Diez cazadores están dispuestos a cazar patos delante de unas rocas sobre las que se posan diez patos. Cada cazador sólo puede hacer un disparo y no puede saber a qué patos disparan los otros. Disparan todos al mismo tiempo, eligiendo cada uno su víctima al azar. Si se repite a menudo esta experiencia, ¿cuantos patos sobrevivirán por término medio?.**

Para efectuar la simulación basta tomar de la tabla números aleatorios de diez cifras. Cada uno de ellos indica el resultado de los diez disparos de los cazadores. Las cifras que no están en cada uno de los números representan a los patos supervivientes.

Simularemos 20 veces la caza de patos y determinaremos el número medio de patos supervivientes.

Utilizaremos la función **randInt(** de la calculadora gráfica. Pulsamos [MATH] [◀] 5 para seleccionar el comando **5: randInt(**. Pulsamos 0 [,] 9 [,] 10 [ )]. De esta forma aparece en la pantalla principal el comando **randInt(0, 9, 10)**. Pulsando [ENTER] sucesivas veces obtenemos:

```
randInt( 0, 9, 10 )
        {5  9  3  1  5  8  0 …
        {5  2  0  9  8  8  2 …
        {8  7  0  2  4  8  2 …
        {0  4  1  9  0  9  6 …
        {9  0  4  6  4  2  9 …
        {9  9  5  6  7  7  6 …
```

Con estos resultados, construimos la siguiente tabla:

Patos cazados	**Patos supervivientes**	**Nº de patos supervivientes**
5939158030	2, 4, 6, 7	4
5209882718	3, 4, 6	3
8702482848	1, 3, 5, 6, 7	5
0419096574	2, 3, 7, 8	4
9046429065	1, 3, 7, 8	4
9956776364	0, 1, 2, 8	4
7720404615	3, 8, 9	3
2706296621	3, 4, 5, 8	4
4391801896	2, 5, 7	3
8399151141	0, 2, 6, 7	4
1036397518	2, 4	2
5140025670	3, 8, 9	3
9834261891	0, 5, 7	3
2710137855	4, 6, 9	3
0623533316	4, 7, 8, 9	4
8685919558	0, 2, 3, 4, 7	5
6443216706	5, 8, 9	3
9961259798	0, 3, 4	3
3280367708	1, 4, 5, 9	4
1529728612	0, 3, 4	3

Podemos construir la siguiente tabla de frecuencias:

Nº de patos supervivientes	2	3	4	5
Frecuencia	1	9	8	2

de donde obtenemos un número medio de patos supervivientes de 3’55.

Ejemplo 2.- **(Problema del cumpleaños). En una sala hay 23 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido el mismo día del año?.**

Como esta probabilidad es difícil de calcular, haremos el problema por simulación. Para ello, se generan números aleatorios de tres cifras. Se eliminan los que no sean el 001, 002, 003, ... , 364, 365 (que representan los 365 días del año). Una vez que se han reunido 23 números, se observa si hay dos o más iguales.

Simularemos 10 veces el problema del cumpleaños y hallaremos la probabilidad que se pide en el problema. Para ello utilizamos la función **randInt**(de la calculadora gráfica para efectuar 10 simulaciones.

Pulsamos [MATH] [◂] 5 para seleccionar el comando **5:randInt(**. Pulsamos 0 [,] 9 [,] 3 [ )]. Aparece en la pantalla principal el comando **randInt(0, 9, 3)**. Al pulsar [ENTER] varias veces obtenemos:

```
randInt( 0, 9, 3 )
          {9  4  6}
          {9  8  8}
          {1  6  9}
          {0  9  9}
```

Proseguimos hasta efectuar un total de 10 simulaciones. De ellas, en dos ocasiones hemos encontrado dos o más fechas coincidentes. Sin embargo no podemos concluir que la probabilidad de que al menos dos personas celebren su cumpleaños el mismo día sea 2/10 , ya que hemos realizado muy pocas simulaciones. Si unimos estos resultados a los de toda la clase, obtendremos una mejor información. La frecuencia relativa debe acercarse a la probabilidad teórica que es de 0’50730.

Ejemplo 3.- ¿Cuántas veces hay que lanzar un dado para que apostando por un seis, al menos, tengamos una probabilidad de ganar superior a 0’5 ?.

Se puede simular el lanzamiento del dado mediante la función **randInt(** de la calculadora gráfica, eligiendo dígitos del 1 al 6 y rechazando el 0, 7, 8 y 9. Para ello usaremos la función randInt(1, 6), lo que se consigue pulsando [MATH] [◂] [5] 1 [,] 6 [ )]. Al pulsar [ENTER] repetidas veces obtenemos:

```
randInt( 1, 6 )
                  5
                  3
                  1
                  5
                  3
                  5
```

Anotamos el número de tiradas que se realizan hasta obtener un seis. Después calculamos el número medio de tiradas necesarias.

Utilizando la calculadora, damos una estimación del número medio de veces que hay que lanzar un dado para obtener, al menos, un seis. Efectuamos en total 30 simulaciones.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Resultados	Nº de lanzamientos
5 3 1 5 3 5 2 2 1 2 4 2 4 4 1 6	16
5 4 4 6	4
4 2 6	3
5 5 6	3
6	1
3 6	2
4 2 4 4 6	5
1 5 2 6	4
2 6	2
6	1
2 1 4 3 1 1 6	7
3 1 5 1 1 4 1 1 3 6	10
3 5 1 5 1 4 2 5 6	9
3 4 2 6	4
1 1 2 1 1 3 5 5 6	9
2 3 5 3 3 3 1 6	8
6	1
5 1 5 5 6	5
4 4 3 2 1 6	6
6	1
6	1
1 2 5 3 2 3 6	7
1 5 2 2 6	5
1 2 1 1 2 5 2 4 5 1 3 6	12
6	1
3 5 5 3 6	5
3 1 2 1 4 3 3 5 3 4 3 6	12
2 5 6	3
6	1
2 1 5 6	4

Con estos datos podemos construir la siguiente tabla de frecuencias:

Nº lanzamientos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16
Frecuencia	7	2	3	4	4	1	2	1	2	1	2	1

El cálculo de la media conduce a que hay que hacer, por término medio, 5’0666 ≈ 5 lanzamientos para que salga un 6. La solución teórica es 6 lanzamientos. Si hacemos un elevado número de simulaciones, el número medio de lanzamientos debe estar próximo a 6.

ACTIVIDADES

Utilizando un generador de números aleatorios, resuelve las siguientes cuestiones:

- **MONEDAS**

a) ¿Cuántas veces hay que lanzar una moneda para obtener dos caras seguidas?.

b) ¿Y para que aparezcan tres caras seguidas?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres monedas a la vez salgan dos caras y una cruz?.

- **DADOS**

a) ¿Cuántas veces hay que lanzar un dado para que aparezcan seguidos tres seises?.

b) ¿Y para que aparezcan seguidos un seis, un número distinto del seis y un seis?.

c) ¿Y para que aparezcan dos números seguidos cuya suma sea superior a 5?.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres dados a la vez obtengas un triple seis?.

- **NACIMIENTOS**

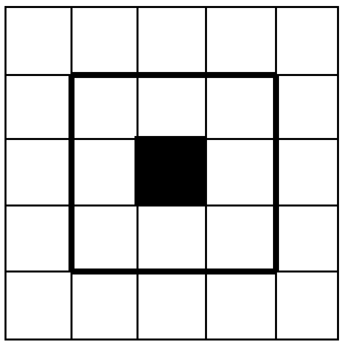
Suponiendo que la probabilidad de que un recién nacido sea chica es 0’48 y por tanto de que sea chico 0’52, calcula la probabilidad de que entre 10 recién nacidos haya entre 3 y 7 chicas.

- **LA BOLSA**

En una bolsa se introducen bolas con una letra; se han marcado cinco bolas con la letra A y quince con la letra B. Se extrae una bola, se anota el resultado y se vuelve a introducir. Se gana si se obtienen dos A seguidas en ocho extracciones consecutivas. Utiliza números aleatorios para simular cinco partidas de este juego.

- **LA DIANA**

En una feria, un niño lanza dardos al azar sobre la diana indicada en la siguiente figura. Utilizando los números aleatorios, halla el número de dardos que esperas que caigan en cada una de las tres zonas indicadas si lanzas 50 veces.



3.– Comprobación experimental mediante simulaciones

La ventaja de la calculadora gráfica es que permite comprobar experimentalmente propiedades y teoremas que de otra forma son difíciles de demostrar. Para ello la calculadora dispone de comandos y funciones que permiten efectuar un número suficiente de simulaciones.

La simulación permite asimilar de forma intuitiva propiedades y teoremas. Si bien no tiene la suficiente fuerza de una demostración en sentido clásico, ayuda a consolidar conceptos y favorece el desarrollo de la intuición.

En las siguientes actividades veremos la utilidad de la simulación y de la calculadora gráfica para comprobar dos teoremas importantes de estadística: la ley de los grandes números y la aproximación de la binomial por la curva normal.

- **LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS**

El matemático suizo Jacques Bernouilli (1654–1705) enunció el siguiente teorema, que bautizó con el nombre de "ley de los grandes números": La frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad tienden a aproximarse a medida que el número de pruebas crece indefinidamente.

Vamos a comprobar esta propiedad en un caso concreto.

Ejemplo.– Lanzamos una moneda 1000 veces y anotamos las frecuencias absolutas y relativas del suceso cara después de 100, 200, 300, …, 1000 lanzamientos. ¿Se estabilizan las frecuencias relativas en torno a un valor?. ¿Las frecuencias absolutas de los sucesos cara y cruz tienden a igualarse al aumentar el número de lanzamientos?.

Un procedimiento que podemos utilizar para comprobar esta propiedad consiste en tomar una moneda real y efectuar un número de lanzamientos suficientemente grande (en este caso, 1000) y anotar el número de caras y de cruces cada 100 lanzamientos (es decir, después de 100, 200, 300, … 1000 lanzamientos). Pero este procedimiento es largo y pesado.

Afortunadamente la calculadora gráfica permite simular cualquier número de lanzamientos de una moneda, usando la función **randInt(** del menú PRB. Entenderemos que 1 = cara y 0 = cruz, de forma que cada lanzamiento será un dígito 0 o 1.

- **Simulación de 100 lanzamientos**

Pulsa [STAT] [ENTER] para iniciar el editor de listas estadísticas. Sitúa el cursor sobre el nombre de la lista L_1 y pulsa [CLEAR] para borrar el contenido de dicha lista.

Pulsa [MATH] [◂] 5 para seleccionar la opción **5: randInt(**. Pulsa 0 [,] 1 [,] 100 [ )] para introducir el comando **L_1 = randInt(0, 1, 100)** en la línea de edición. Al pulsar [ENTER] se genera la lista L_1 como una colección de 100 dígitos ceros y unos. Para hallar las frecuencias absolutas de 1=cara y 0=cruz, dibuja el histograma correspondiente.

Pulsa [2nd] [STATPLOT] [ENTER] para definir el Plot1. Define este gráfico con las siguientes características:

Activado	On
Type	Histograma
Xlist:	L_1
Freq:	1

Pulsa [WINDOW] y establece los siguientes parámetros de ventana gráfica:

Xmin= –0.5
Xmax= 1.5
Xscl= 1
Ymin= –1
Ymax=100

Pulsa [GRAPH] y se muestra el histograma, con intervalos de anchura igual a 1. Para ver las frecuencias, pulsa [TRACE] y utiliza las teclas de cursor [▸] [◂]. Con ello se muestran los extremos de cada intervalo y la frecuencia absoluta correspondiente. Anota las frecuencias absolutas en una tabla.

- **Simulaciones de 200, 300, 400, …, 1000 lanzamientos**

Realiza el mismo proceso anterior, pero utilizando respectivamente los comandos:

Para 200 lanzamientos…	L_1 = rndInt(0, 1, 200)
Para 300 lanzamientos…	L_1 = rndInt(0, 1, 300)
Para 400 lanzamientos…	L_1 = rndInt(0, 1, 400)
Para 1000 lanzamientos…	L_1 = rndInt(0, 1, 999)

Observa que no podemos simular de golpe 1000 lanzamientos, porque la longitud máxima de una lista con la calculadora TI–83 es de 999 elementos.

En cada caso representa el histograma correspondiente y utiliza la tecla [WINDOW] para establecer los parámetros adecuados de la ventana gráfica (ten en cuenta que hay que modificar cada vez el valor de Ymax de forma que sea algo superior a la mitad del número de lanzamientos). Utiliza cada vez la tecla [TRACE] para hallar las frecuencias absolutas de 1=cara y 0=cruz. Con los resultados obtenidos construye la siguiente tabla:

n (lanzamientos)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	999
f(1) (nº de caras)										
f(0) (nº de cruces)										

Este trabajo se puede agilizar mucho en clase, si se organiza en grupos de tres estudiantes y cada grupo hace solamente una simulación (un grupo simula 100 tiradas, otro grupo simula 200 tiradas, etc). De esta forma en muy pocos minutos pueden obtenerse los resultados.

En una clase se obtuvieron estos resultados:

n (lanzamientos)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	999
f(1) (nº de caras)	50	96	151	205	245	317	347	394	450	486
f(0) (nº de cruces)	50	104	149	195	255	283	353	406	450	513

Con lo que la correspondiente tabla de frecuencias relativas fue:

n (lanzam.)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	999
f_r (1=cara)	0'50	0'48	0'5033	0'5125	0'49	0'5283	0'4957	0'4925	0'50	0'4865

Para representar gráficamente esta tabla, usaremos un diagrama de líneas. Primero editamos las listas L_1=nº de lanzamientos y L_2=frecuencias relativas de cara.

Pulsa [STAT] [ENTER] para abrir el editor de listas estadísticas. Sitúa el cursor sobre el nombre de la lista L_1 y pulsa [CLEAR] para borrar su contenido. A continuación pulsa [2^{nd}] [LIST] [▶] 5 para elegir la opción **5: seq(** del menú LIST OPS. Después pulsa [X,T,θ,n] [,] [X,T,θ,n] [,] 100 [,] 1000 [,] 100 [ )]. De esta forma aparece en la línea de edición el comando **L_1 = seq(X, X, 100, 1000, 100)**. Pulsa [ENTER] y se generará la lista L_1.

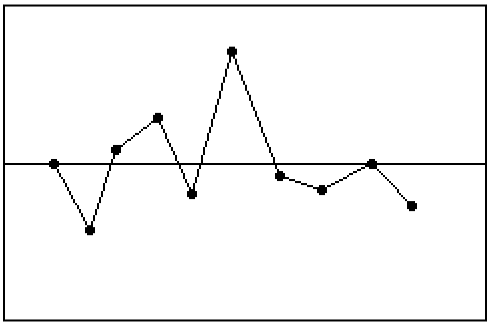
Sitúa el cursor sobre el nombre de la lista L_2. Pulsa [▼] y teclea cada una de las frecuencias relativas de la tabla anterior. Pulsa [ENTER] o [▼] para pasar cada vez a la línea siguiente.

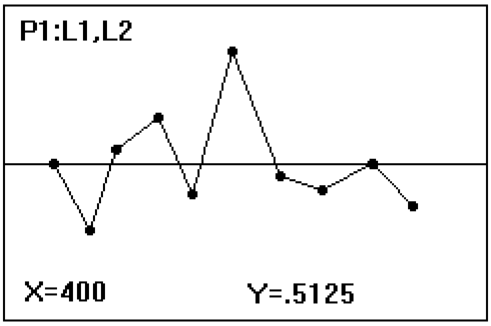
Pulsa [2^{nd}] [STATPLOT] [ENTER] para definir el Plot1. En la siguiente pantalla establece las características del gráfico:

Activado	On
Type	Líneas
Xlist	L_1
Ylist	L_2
Mark	□

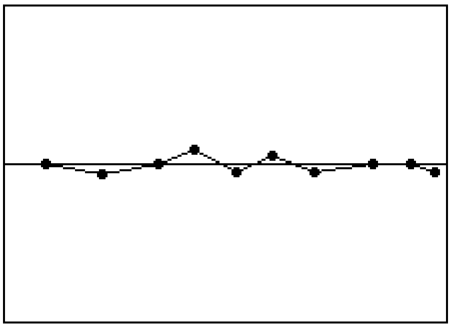
Pulsa [Y=] para abrir el editor de funciones. Si es necesario, borra las funciones existentes. Introduce la función Y_1 =0'5.

Pulsa [ZOOM] 9 para activar el comando **9: ZoomStat** del menú ZOOM. Se representa gráficamente el diagrama de líneas. Al pulsar [TRACE] y las teclas de cursor [▸] [◂], se muestran en el diagrama las frecuencias relativas correspondientes a cada nº de lanzamientos.





Si se modifica a través de [WINDOW] los valores de Ymin e Ymax a 0 y 1, respectivamente, se puede apreciar en el gráfico que, efectivamente, las frecuencias relativas tienden a estabilizarse entorno a $\frac{1}{2} = 0'5$.



ACTIVIDADES

- **DADOS**

Lanzamos un dado 1000 veces y anotamos las frecuencias absolutas y relativas del suceso "sale seis" después de 100, 200, 300, …, 1000 lanzamientos. ¿Se estabilizan las frecuencias relativas en torno a un valor?. Utiliza la calculadora gráfica para simular 100, 200, 300, …, 1000 lanzamientos del dado y con ayuda de histogramas halla las frecuencias absolutas y relativas. Construye la tabla:

n (lanzamientos)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	999
f(6) (nº de seises)										
$f_r(6)$ (f. relativa)										

Representa gráficamente las frecuencias relativas correspondientes a cada número de lanzamientos y extrae conclusiones.

4.– Simulación de modelos.

- **DECRECIMIENTO**

Un juego para dos jugadores.

Material: Cincuenta dados de parchís, una tabla de resultados y apuestas para cada jugador.

Reglas del juego:

Se lanzan los cincuenta dados y se retiran los que muestren la cara “seis”. Se lanzan de nuevo los que quedan y se retiran de nuevo los que caigan mostrando “seis”. Se repite el proceso hasta que no quede ninguno, contando el número de veces que hay que repetir la experiencia. Antes de empezar a jugar, cada jugador hace una apuesta sobre el número de lanzamientos necesarios. Una vez realizados los lanzamientos, cada jugador anota en su tabla la diferencia entre su apuesta y el número obtenido. Se juega 10 veces. El ganador es quien, al final de la partida, obtenga una suma menor de sus diferencias.

PARTIDA	APUESTA	Nº LANZAMIENTOS	DIFERENCIA
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
		TOTAL......................	

a) Recoge la información obtenida en tu clase en una tabla de frecuencias. ¿Cuál es el número de lanzamientos necesario para eliminar todos los dados?. ¿Qué valor es más representativo, la moda o la media?.

b) Dibuja la gráfica de la relación funcional nº de tiradas realizadas → nº de dados sin retirar. Estudia las características de esta gráfica.

La situación anterior es un modelo de la desintegración radiactiva, proceso por el que ciertas sustancias pierden masa a lo largo del tiempo, hasta desintegrarse. Este proceso es exponencial, es decir se ajusta, aproximadamente, a un modelo del tipo $y = a(2'7)^{b\,x}$, *donde y es el número de partículas supervivientes y x el tiempo transcurrido. En todo proceso de desintegración se llama* <u>*vida media*</u> *al tiempo necesario para que la cantidad de sustancia radiactiva quede reducida a la mitad.*

c) ¿Cuál crees que es la vida media de la población inicial de dados?. Primero formula una conjetura y después trata de ajustar un modelo exponencial a los datos que has obtenido en los lanzamientos.

d) Haz un estudio parecido al anterior, suponiendo que se lanzan dados tetraédricos y no cúbicos, de forma que, en cada tirada, se eliminan todos aquellos que muestren un 4.

e) Repite el mismo estudio suponiendo que se lanzan dados octaédricos, de formar que, en cada tirada, se eliminan todos aquellos que muestren un 8.

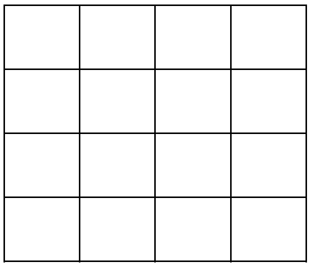
f) Investiga qué ocurre si en lugar de dados se lanzan monedas, eliminando cada vez todas aquellas que muestren “cara”. Extrae conclusiones.

- **INDIFERENCIA**

Dos jugadores, A y B, se disponen a jugar sobre un tablero 4×4 del modo siguiente:

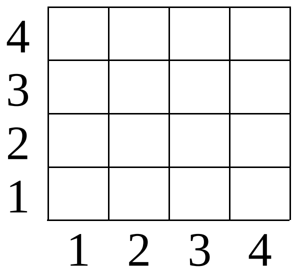
Ambos disponen de 16 fichas, de diferente color para cada jugador. Cada jugador coloca 8 fichas sobre su medio tablero y guarda las otras 8 en reserva. Así pues, al principio del juego, la mitad del tablero se cubre con fichas de un color (negras, por ejemplo) y la otra mitad con fichas de otro color (blancas, por ejemplo). Se lanza ahora una moneda. Si sale “cara”, una ficha blanca puede ser reemplazada por una negra de la reserva. Si el resultado es “cruz”, una ficha negra puede ser sustituida por una blanca de la reserva. Gana el que logra llenar todo el tablero con sus fichas.

Estudia este juego: ¿Cuáles son las situaciones más frecuentes?. ¿Hay una estrategia ganadora?. Estudia las tasas de nacimiento y muerte de las fichas.



- **EQUILIBRIO**

Para este juego es necesario un tablero con coordenadas horizontales y verticales, un par de dados para seleccionar un cuadrado del tablero y fichas de dos colores, en número suficiente para llenar el tablero con cualquier color.



Dos jugadores por turno colocan al azar sus fichas en el tablero hasta que todos los cuadrados están llenos. Se lanzan los dos dados. La ficha seleccionada por los dados es sustituida por otra ficha de las reservas del color oponente. En cada lanzamiento el ganador (que tiene más fichas sobre el tablero) recibe un punto por cada ficha en exceso sobre la mitad de los cuadrados del tablero. Al final del juego (por ejemplo, después de 30 tiradas) cada jugador suma sus puntos y divide la suma por el número de veces que ha lanzado los dados. Gana el que obtenga mayor puntuación.

Estudia este juego: estados posibles, frecuencia de aparición de cada estado con el tiempo, tasas de nacimiento y muerte de las fichas según la variación de la población de fichas.

- **<u>CATÁSTROFE</u>**

Este juego es igual que el anterior, pero difiere en el cambio de fichas. En lugar de reemplazar la ficha seleccionada por los dados por una ficha de color contrario, se dobla la ficha seleccionada a expensas del color contrario. Por ejemplo, si el dado selecciona un cuadro con una ficha blanca, otra blanca de las reservas puede sustituir a cualquier ficha negra del tablero.

Haz un estudio parecido al del juego anterior.

Se dispone de fichas de cuatro colores en número suficiente para llenar el tablero con cualquier color. Al comienzo del juego se colocan al azar, y en igual número los cuatro tipos de fichas en el tablero.

Se lanzan un par de dados, aplicándose la siguiente regla:

1) La ficha elegida por los dados es eliminada del tablero y colocada en la reserva.

   Se vuelven a lanzar los dos dados, para elegir un cuadro no vacío.

2) La ficha elegida por el dado es doblada, es decir, se toma de la reserva una ficha del mismo color y se coloca en el cuadro vaciado por el lanzamiento previo de los dados.

   El juego termina cuando un color ha llenado completamente el tablero.

Enumera los estados posibles. Estudia las probabilidades de transición entre ellos y la frecuencia de aparición de cada uno. Halla las tasas de nacimiento y muerte con respecto a la variación de la población de fichas.

SIMULACIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS CON LA CALCULADORA GRÁFICA CLASSPAD 300 DE CASIO

Introducción

A partir de los datos muestrales se asigna una probabilidad a cada uno de los datos, usando las frecuencias relativas. La forma de los histogramas correspondientes permite introducir el concepto de modelo probabilístico. El modelo que aparece con más frecuencia es el definido por la curva normal. El estudio de la Estadística inferencial es realmente muy difícil si no se utilizan recursos apropiados.

La calculadora ClassPad 300 permite obtener con facilidad números combinatorios, factoriales, áreas bajo la curva normal y valores de la distribución binomial. También permite obtener estimaciones de parámetros, determinar intervalos de confianza, validar hipótesis, etc.

En esta sesión estudiaremos algunas de las posibilidades de la ClassPad 300 para el estudio de la Probabilidad y la Inferencia Estadística en ESO y Bachillerato

1. Simulación

1. <u>SIMULACIÓN</u>

1. Generación de números aleatorios

2. La función "rand" del catálogo (teclado virtual [cat]) genera números aleatorios. Si no se indica un argumento, "rand" genera valores aleatorios comprendidos entre 0 y 1 con 10 dígitos decimales. Cuando se indican dos valores enteros como argumentos, se generan números aleatorios entre dichos valores.

Problema	Utilice este teclado:				Operación
	mth	abc	cat	2D	
Generar números aleatorios entre 0 y 1.			Func		[rand] EXE
Generar números aleatorios entre 1 y 6.			Func		[rand] **1** , **6** EXE

3. La función "randList" del catálogo (teclado virtual [cat]) puede generar una lista cuyos elementos contengan números aleatorios. La sintaxis es: rangList(n, [, a, b])

4. Si se omiten los argumentos a y b, se genera una lista de n elementos que contiene valores aleatorios decimales. Si se indican los argumentos a y b, se genera una lista con n elementos que contiene valores aleatorios enteros comprendidos entre a y b.

Problema	Utilice este teclado:				Operación
	mth	abc	cat	2D	
Generar una lista de tres elementos que contenga valores aleatorios decimales.			Func		[randList] **3** EXE
Generar una lista de cinco elementos que contenga valores aleatorios entre 1 y 6.			Func		[randList] **5** , **1** , **6** EXE

5. El comando "randSeed" del catálogo (teclado virtual [cat]) configura la generación de números aleatorios (que pueden ser secuenciales o no secuenciales), indicando un patrón para la generación secuencial de números aleatorios. El argumento puede indicar un número entero entre 0 y 9. El número 0 indica generación no secuencial. Un número entre 1 y 9 actúa como semilla para la generación de números aleatorios secuenciales. Una vez usado el comando "randSeed", los números aleatorios que se generen por la Classpad seguirán siempre el mismo patrón aleatorio.

Problema	**Utilice este teclado:**				**Operación**
	mth	**abc**	**cat**	**2D**	
Generar números aleatorios secuenciales usando 3 como semilla.			Cmd		[RandSeed] **3** EXE
Generar el primer valor. Generar el segundo valor. Generar el tercer valor.			Func		[rand] EXE [rand] EXE [rand] EXE

TÉCNICAS DE RECUENTO EN ESO Y BACHILLERATO

Introducción

Tradicionalmente se ha considerado la enseñanza y el aprendizaje de técnicas de recuento como un conjunto reducido de recetas o algoritmos combinatorios, incluyendo variaciones con y sin repetición, permutaciones y factoriales, combinaciones y números combinatorios. Sin embargo, la mayor parte de problemas de recuento son lo suficientemente complejos como para que no se puedan aplicar las técnicas combinatorias clásicas. Por ello es importante que, tanto en ESO como en Bachillerato, se estudien situaciones en donde lo importante sea buscar una estrategia apropiada de resolución, más que la aplicación mecánica de una receta.

En las siguientes actividades se proponen situaciones donde se pueden ensayar diferentes estrategias:

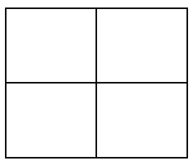
- Construir una tabla o hacer un diagrama.
- Resolver primero un problema análogo más sencillo.
- Dividir el problema en subproblemas.
- Particularizar.
- Generalizar.

Todas ellas pueden tratarse tanto en ESO como en Bachillerato.

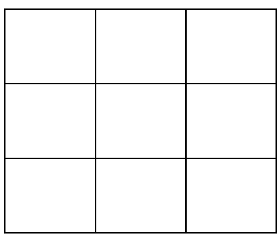
1. Técnicas de recuento

- **<u>CUADRADOS</u> (*)**

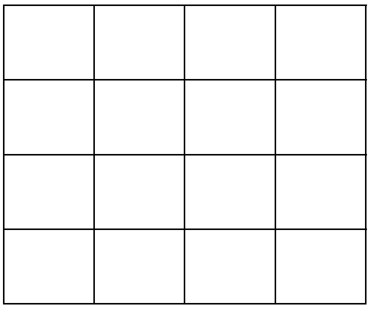
a) En la siguiente trama se pueden construir 6 cuadrados de forma que sus vértices sean puntos de la trama. Dibújalos.



b) En la trama siguiente se pueden construir 20 cuadrados con sus vértices en puntos de la trama. Dibújalos todos.



c) ¿Cuántos cuadrados se podrán construir con los vértices en los puntos de una trama 4 × 4 ?. ¿Te atreves con una trama 5 × 5 ?.



- **<u>TORNEO DE TENIS</u> (*)**

a) Ricardo y Javier van a jugar al tenis y deciden que ganará el que consiga dos sets seguidos o tres alternativos. ¿Cuáles son los posibles desarrollos que se pueden dar en el torneo?.

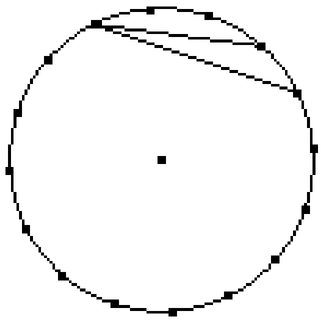
b) Ahora van a disputar otro torneo en el que el ganador será el primero que gane tres sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tienen que disputar?. ¿Cuántos posibles desarrollos puede tener el torneo?.

c) ¿Y si deciden que ganará el torneo el primero que gane tres sets seguidos?.

- **<u>CUERDAS EN UNA CIRCUNFERENCIA</u>**

a) Dibuja una circunferencia de radio 5 cm. Divídela en 16 partes iguales y señala los puntos de división. A continuación traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás. ¿Cuántas cuerdas tendrás que dibujar?.

b) ¿Y si la circunferencia está dividida en 32 partes iguales?. ¿Y si está dividida en 64 partes iguales?.



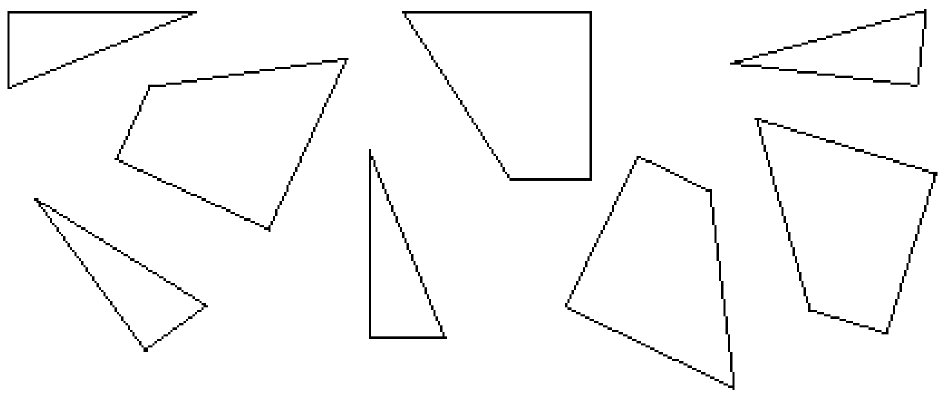
- **<u>BILLETES</u>**

a) En una línea de ferrocarril hay ocho estaciones, incluidas las terminales. Si en cada billete va impreso el nombre de la estación de partida seguido del de la llegada, ¿cuántos billetes distintos deben imprimirse?. ¿Y si se añade en el billete la frase “o viceversa”?.

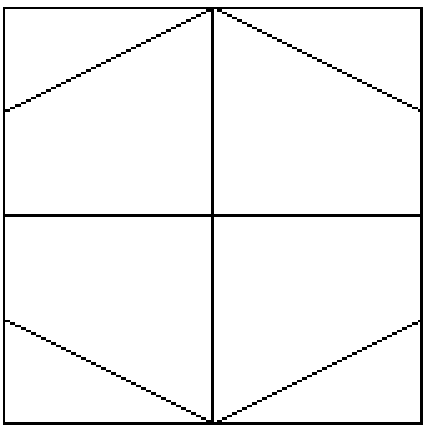
b) Supongamos que no se imprimen los nombres de las estaciones, sino el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre los pueblos son todas distintas. ¿Cuántos billetes deben imprimirse?. ¿Y si las distancias entre los pueblos son iguales?.

- **RECOMPOSICIÓN DEL CUADRADO (*)**

a) Juntando estas ocho piezas puedes construir un cuadrado. Inténtalo.



b) Por ejemplo, ésta es una de las formas de construir el cuadrado. ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?.



- **LA B Y LA A**

La palabra BABAB contiene tres B y dos A. ¿Qué palabras que como ésta contengan tres B y dos A podemos formar?. ¿Cuántas hay en total?.

- **PINTURA**

Tenemos cinco botes de pintura de diferentes color R, A, N, B, V y queremos hacer todas las mezclas posibles con pintura de dos botes a la vez. ¿Cuántas mezclas podemos hacer?.

- **ASCENSOR**

Un ascensor se pone en marcha con cinco pasajeros y se detiene en tres pisos. Calcula el número de diferentes formas en que pueden bajarse los pasajeros atendiendo sólo a su número.

RECUENTOS CON LA CALCULADORA GRÁFICA

Introducción

La calculadora gráfica presenta grandes ventajas cuando se trata de asignar o calcular probabilidades. Esta asignación puede hacerse de acuerdo con diversos criterios:

- efectuar recuentos mediante técnicas combinatorias elementales;
- utilizar modelos probabilísticos concretos, como el binomial o el normal;
- generar números aleatorios y efectuar simulaciones, asignando como probabilidad la frecuencia relativa correspondiente a un gran número de pruebas.

Además se puede estudiar gráficamente la evolución de la frecuencia relativa en varios conjuntos de simulaciones, lo que permite construir una red conceptual esencial en probabilidad, definido por las leyes de los grandes números.

◆ Técnicas combinatorias en la calculadora gráfica Ti–83

Para visualizar el menú MATH PRB, pulsa [MATH] [◀]. Cuando seleccionas una opción desde el menú, su nombre se copia en la posición del cursor.

- La función **nPr** (número de permutaciones y variaciones) devuelve el número de permutaciones (variaciones) de n elementos tomados de r en r. Tanto n como r deben ser enteros positivos.

- La función **nCr** (número de combinaciones) devuelve el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r, donde n y r son enteros positivos.

- La función **!** (factorial) devuelve el factorial de un entero positivo entre 0 y 69.

Ejemplos:	**5 nPr 2**	**20**
	5 nCr 2	**10**
	6!	**720**

1) *¿Cuántos números diferentes pueden formarse usando cuatro de las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si las cifras no pueden repetirse?.*

6 nPr 4 **360**

2) *¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 tareas entre 8 empleados?*

8 nPr 8 **40320**

o también así: **8!** **40320**

3) *Un jurado debe seleccionar a tres personas, para lo que entrevista a cinco candidatos. ¿Cuántas listas distintas puede confeccionar?.*

5 nCr 3 **10**

4) *Se desea confeccionar una apuesta de la lotería primitiva, en la que se señalan 6 números de 49. ¿Cuántas apuestas diferentes puedes hacer?. ¿Cuál es la probabilidad de ganar con una única apuesta?. ¿Y con cinco apuestas?.*

El número de apuestas se obtiene así: **49 nCr 6** **13983816**

La probabilidad de ganar con una apuesta es **1 / Ans** **7.15112384E–8**

La probabilidad de ganar con 5 apuestas es **Ans*5** **3.575561921E–7**

ACTIVIDADES

- **QUINIELAS**

Para completar una apuesta simple de una quiniela hay que tachar uno de los símbolos 1, X, 2 en cada uno de los quince partidos de que consta el boleto. ¿Cuántas apuestas simples hay que hacer para tener la seguridad de acertar?. ¿Cuál es la probabilidad de acertar con una única apuesta? ¿Y con cinco apuestas?.

- **COLORES**

a) Utilizando cuatro colores base y mezclando tres colores distintos en la misma proporción, ¿cuántos colores diferentes se pueden obtener?.

b) Disponemos de telas con los cuatro colores anteriores y con ellas queremos hacer banderas tricolores. ¿Cuántas banderas distintas se conseguirán?.

c) Resuelve los apartados anteriores suponiendo que disponemos de A colores y mezclamos B colores diferentes.

- **EL COCHE**

En un coche viajan 5 personas.

a) ¿De cuántas formas distintas podrán ir sentadas?.

b) Contesta a la pregunta anterior, pero teniendo en cuenta ahora que sólo dos de las cinco personas saben conducir.

- **HELADOS**

Una heladería dispone de 6 clases de helados. ¿Cuántas copas de cuatro sabores diferentes se pueden formar?.

- **PRODUCTOS**

¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números 3, 5, 7 y 9?.

- **FERROCARRILES**

Una compañía de ferrocarriles tiene una red de 24 estaciones. Para los diferentes trayectos debe confeccionar billetes donde figure la estación de origen y la de destino. ¿Cuántas clases de billetes diferentes debe imprimir?.

- **INFORMATIVOS**

Una cadena de televisión dispone para un informativo de 4 presentadores para las noticias nacionales, 3 para las internacionales, 2 para deportes y 2 para el tiempo. ¿De cuántas formas puede desarrollarse el noticiario si:

a) en cada sección actúa un solo presentador?.

b) en las noticias nacionales e internacionales actúan dos, uno de titular y otro de ayudante, y en las otras uno?.

TÉCNICAS COMBINATORIAS CON LA CALCULADORA GRÁFICA CLASSPAD 300 DE CASIO

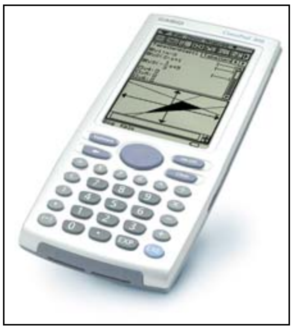
Introducción

La calculadora gráfica es un recurso poderoso que permite obtener con facilidad números combinatorios y factoriales. La calculadora gráfica FX–9750G PLUS de CASIO presenta grandes ventajas cuando se trata de resolver problemas clásicos de combinatoria. En las siguientes actividades veremos ejemplos concretos de su uso en ESO o Bachillerato.

1. Cálculo combinatorio

- Podemos utilizar las funciones específicas nPr(y nCr(del teclado virtual [cat] para obtener el número de variaciones, permutaciones y/o combinaciones. Esto es especialmente útil en la resolución de algunos problemas de probabilidad.

Problema	Utilice este teclado:				Operación
	mth	abc	cat	2D	
¿Cuántas permutaciones diferentes son posibles cuando tiene 10 objetos diferentes y ordena cuatro de ellos a la vez? $_{10}P_4 = 5040$	CALC		Func		[nPr] 10 [,] 4 [EXE]
¿Cuántas combinaciones diferentes son posibles cuando tiene 10 objetos diferentes y quita cuatro a la vez? $_{10}C_4 = 210$	CALC		Func		[nCr] 10 [,] 4 [EXE]
¿De cuántas formas se pueden ordenar las 40 cartas de una baraja española?	CALC				40! [EXE]
¿Cuál es la probabilidad de acertar la combinación ganadora en la lotería primitiva?	CALC		Func		[nCr] 49 [,] 6 [EXE]



ACTIVIDADES

- **BANDERAS**

En un colegio se va a celebrar una competición de fútbol y los responsables de la organización quieren que todos los equipos tengan por distintivo una bandera, para lo cual disponen de tres piezas de tela de diferentes colores: blanca, verde y roja.

a) ¿Cuántas banderas de un solo color se pueden hacer?.

b) ¿Cuántas banderas de dos colores diferentes se pueden hacer?.

c) ¿Cuántas banderas de tres colores diferentes se pueden hacer?.

d) ¿Para cuántos equipos habrá banderas?.

- **CAPICÚAS**

Una compañía de autobuses expende billetes numerados con 5 dígitos. Un coleccionista de números capicúas decide conseguirlos todos. ¿Cuántos hay?.

- **MATRÍCULAS**

Aunque es poco frecuente, todavía se pueden ver coches con matrícula antigua, como por ejemplo, HU–120245. Utilizando números de hasta 6 dígitos, ¿cuántas placas de matrícula distintas se pueden confeccionar en cada provincia?.

Actualmente las placas de matrícula tienen también 6 elementos (independientemente de las iniciales de la provincia), como por ejemplo HU–2258–BP. ¿Cuántas placas de matrícula distintas se pueden realizar utilizando cuatro dígitos y dos letras?.

- **HELADOS**

Una heladería dispone de 12 clases de helados. ¿Cuántas copas de 3 bolas de helado diferentes puede ofrecer al público?.

- **FICHAS**

Con las 40 fichas de una bolsa se forman todos los grupos posibles sin ordenar de 15 fichas y todos los grupos posibles también sin ordenar de 15 fichas. ¿De qué clase de grupos habrá más?.

- **ALFABETO MORSE**

El alfabeto Morse utiliza solamente dos símbolos, el punto y la raya. Así, por ejemplo, la A se simboliza • —; la B es — • • •, etc.

a) Para los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se usan necesariamente cinco signos. ¿Es posible simbolizar así los diez dígitos?. ¿Cuántos bloques de cinco signos sobran?.

b) Para las letras del alfabeto hay que usar como máximo cuatro signos. ¿Cuántos bloques se pueden formar?. ¿Son suficientes para simbolizar las letras del alfabeto?. ¿Cuántos bloques sobran?.

TABLAS DE CONTINGENCIA EN ESO Y BACHILLERATO

Introducción

En numerosos problemas se trata de analizar la información conjunta de dos o más variables. Para ello se utilizan tablas de doble entrada que recogen las frecuencias observadas (contingencias) correspondientes a todos los posibles cruces de variables. A partir de una tabla de contingencia se pueden analizar las relaciones de dependencia o independencia entre las variables. De esta forma se construye el concepto de probabilidad condicionada, que tiene numerosas aplicaciones. Las tablas de contingencia están relacionadas con los diagramas de árbol.

En estas actividades se estudiarán algunas experiencias con alumnos de 3º y 4º de ESO y Bachillerato en las que se analizan diversos procesos utilizando tablas de contingencia, se observan las relaciones entre tablas de contingencia y diagramas de árbol y se aplican estas herramientas para resolver algunos problemas.

◆ Tablas de contingencia y diagramas de árbol

- **<u>TABLA DE CONTINGENCIA</u>**

Se han observado 50 enfermos de la piel tratados con un nuevo antibiótico y otros 70 enfermos no tratados. Anotadas las curaciones al cabo de dos semanas, los resultados han sido los siguientes:

	TRATADOS	NO TRATADOS
CURADOS	40	20
NO CURADOS	10	50

a) ¿Qué probabilidad hay de que un enfermo curado haya sido tratado?.

b) ¿Qué probabilidad hay de que un enfermo curado no haya sido tratado?.

Una tabla como la siguiente recibe el nombre de <u>tabla de contingencias</u>, ya que en ella figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos A y B, A y no B, no A y B, no A y no B.

	A	no A	TOTAL
B	p(A y B)	p(no A y B)	p(B)
no B	p(A y no B)	p(no A y no B)	p(no B)
TOTAL	p(A)	p(no A)	1

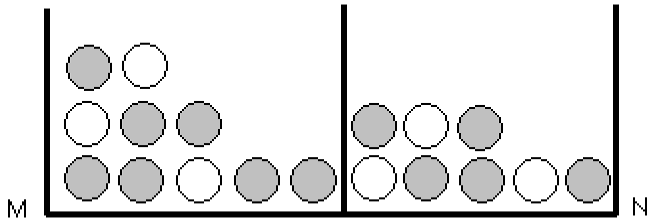
Teniendo en cuenta que el suceso no A es el suceso contrario de A (que se indica por $\overline{A}$), podemos expresar la tabla de contingencias de esta otra forma:

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	$p(A \cap B)$	$p(\overline{A} \cap B)$	p(B)
$\overline{B}$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$p(\overline{B})$
TOTAL	p(A)	$p(\overline{A})$	1

Las tablas de contingencias, junto con los diagramas de árbol, son herramientas muy útiles para el cálculo de probabilidades y la estadística.

- **URNAS**

Disponemos de dos urnas M y N. La primera contiene 7 bolas negras y 3 blancas, y la segunda 5 negras y 3 blancas. Se saca una bola al azar de una de las dos urnas, elegida también al azar, y resulta ser blanca. ¿Qué probabilidad hay de que proceda de la urna M?.



- **LAS TRES FICHAS**

Disponemos de tres fichas:

✓ La primera tiene sus dos caras de color verde.

✓ La segunda tiene sus dos caras de color amarillo.

✓ La tercera tiene una cara de cada color.

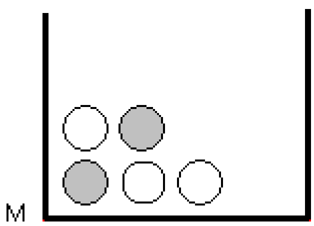
El jugador A muestra por una cara una cualquiera de las fichas. Si el jugador B adivina de qué ficha se trata, gana; en caso contrario gana A.

¿Quién crees que tiene ventaja, A ó B?.

- **UNA URNA**

a) En una urna hay 3 bolas blancas y 2 verdes. Se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca bola verde?.

   La bola extraída se vuelve a meter en la urna y se repite la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de sacar bola verde otra vez?. ¿Depende este resultado de la primera prueba?.



b) En la misma situación del apartado anterior, si después de la primera prueba no se vuelve a meter la bola en la urna, ¿cuál es la probabilidad de sacar bola verde en la segunda extracción?. ¿Depende ahora de lo que haya ocurrido la primera vez?.

c) En la misma situación de apartados anteriores, sacamos una bola y luego otra. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean verdes?. Distingue dos casos, según que la primera bola extraída se devuelva o no a la urna.

Dos sucesos A y B son <u>*independientes*</u> *cuando la probabilidad de uno de ellos no depende de la realización del otro.*

Dos sucesos A y B son independientes si la probabilidad de que ocurran simultáneamente es igual al producto de sus probabilidades. Es decir:

A y B son independientes si se cumple $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

En caso contrario, se dice que A y B son <u>*dependientes*</u>*, lo que significa que la probabilidad de uno de ellos depende de la realización del otro.*

Por ejemplo, si en la actividad anterior llamamos:

A=sale bola verde en la primera extracción.

B=sale bola verde en la segunda extracción.

Se cumple que:

✓ *Si las extracciones se hacen con devolución, los sucesos A y B son independientes.*

✓ *Si las extracciones se hacen sin devolución, los sucesos A y B son dependientes.*

- **<u>¿SUCESOS INDEPENDIENTES?</u>**

Di si son dependientes o independientes los sucesos A y B y calcula la probabilidad de que ocurra cada uno de ellos:

a) Se lanza una moneda dos veces.

A=sale cara la primera vez. B=sale cara la segunda vez.

b) Se lanza dos veces un dado.

A=sale 3 la primera vez. B=sale número impar la segunda vez.

c) Se lanzan un dado azul y otro verde.

A=sale 6 en el dado azul. B=sale número par en el dado verde.

d) Se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de una urna que tiene 2 bolas verdes y 3 amarillas.

A=la primera bola es amarilla. B=la segunda bola es amarilla.

Además de las técnicas combinatorias, podemos usar diagramas de árbol y tablas de contingencia para asignar probabilidades a sucesos y resolver problemas. Cualquier problema de probabilidad planteado a través de diagramas de árbol y tablas de contingencia se puede resolver utilizando cualquier tipo de calculadora. Sin embargo, la calculadora gráfica presenta la novedad de operar directamente con fracciones, expresando el resultado también como fracción.

De esta forma se facilita a los estudiantes un proceso de cálculo con fracciones en el que suelen presentar errores con frecuencia. La ventaja del uso de la calculadora gráfica es que estos errores de cálculo desaparecen, de manera que el foco de atención se desplaza de los algoritmos de cálculo a la interpretación en contexto de los resultados.

Ejemplo.– Se han observado 50 enfermos de la piel tratados con un determinado antibiótico, nuevo en el mercado, y otros 70 enfermos no tratados. Anotadas las curaciones al cabo de dos semanas, los resultados han sido los siguientes:

	TRATADOS	**NO TRATADOS**
CURADOS	**40**	**20**
NO CURADOS	**10**	**50**

a) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado haya sido tratado?.

b) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado no haya sido tratado?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo se cure o sea tratado?.

Podemos completar la tabla anterior añadiendo una columna y una fila de totales:

	TRATADOS	NO TRATADOS	TOTAL
CURADOS	40	20	60
NO CURADOS	10	50	60
TOTAL	50	70	120

a) En esta tabla observamos que de un total de 60 curados hay 40 tratados, luego la probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado es

$$\text{p(tratado/curado)} = p(T / C) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

b) También vemos que de un total de 60 curados no han sido tratados 20, luego la probabilidad de que un enfermo curado no haya sido tratado es

$$\text{p(no tratado/curado)} = p(\overline{T} / C) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

c) Como hay 60 curados de un total de 120 enfermos, la probabilidad de curarse es $p(C) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$. Como hay 50 tratados de un total de 120 enfermos, la probabilidad de ser tratado es $p(T) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$. Como hay 40 tratados y curados de un total de 120 enfermos, la probabilidad de ser tratado y curarse es $p(T \cap C) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la probabilidad de curarse o tratarse es: $p(T \cup C) = p(T) + p(C) - p(T \cap C) = \frac{5}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

Para hacer esta operación con fracciones utilizaremos la calculadora gráfica. Pulsamos:

5 [÷] 12 [+] 1 [÷] 2 [–] 1 [÷] 3 [ENTER]. En pantalla aparece:

```
5 / 12 + 1 / 2 – 1 / 3
                .5833333333
```

Para expresar el resultado en forma de fracción, pulsamos [MATH] [ENTER] para seleccionar el comando 1: ▸Frac. Al pulsar [ENTER] obtenemos:

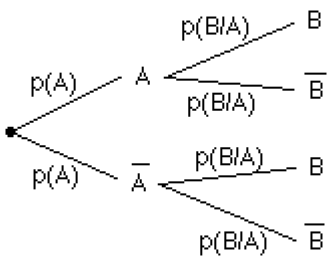
```
5 / 12 + 1 / 2 – 1 / 3
                .5833333333
Ans ▸ Frac
                     7 / 12
```

Por tanto, la probabilidad de ser tratado o curarse es $p(T \cup C) = \frac{7}{12}$

Una tabla como la anterior se llama TABLA DE CONTINGENCIAS, ya que en ella figuran todas las posibilidades, o contingencias, de los sucesos: $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$. El esquema de dicha tabla es:

	A	$\overline{A}$	TOTALES
B	$p(A \cap B)$	$p(\overline{A} \cap B)$	$p(B)$
$\overline{B}$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$p(\overline{B})$
TOTALES	P(A)	$p(\overline{A})$	1

Dada la tabla de contingencias, puedes construir el diagrama de árbol:



sin más que calcular cada probabilidad condicionada, teniendo en cuenta la expresión:

$$p(Y/X) = \frac{p(X \cap Y)}{p(X)}$$

Recíprocamente, dado el diagrama de árbol, obtenemos, multiplicando los números de una misma rama, las probabilidades: $p(A \cap B)$, $p(A \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cap B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$

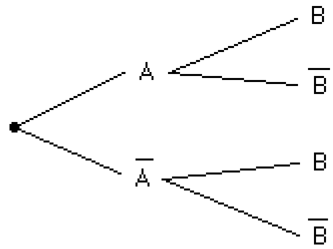
es decir, la tabla de contingencias.

ACTIVIDADES

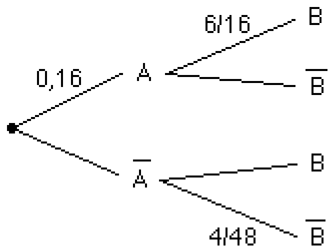
- **ÁRBOLES Y CONTINGENCIAS**

a) Dada la tabla de contingencias, construye el diagrama de árbol.

	A	$\overline{A}$	TOTALES
B	0’30	0’35	0’65
$\overline{B}$	0’15	0’20	0’35
TOTALES	0’45	0’55	1



b) Dado el diagrama de árbol, construye la tabla de contingencias.



	A	$\overline{A}$	TOTALES
B			
$\overline{B}$			
TOTALES			

- **COMPORTAMIENTO EN COMPRAS**

Se ha realizado un estudio a 100 familias, clasificándolas por nivel de ingresos y por comportamiento en compras. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	Ingresos bajos (inferiores a 30000 $)	**Ingresos altos (superiores a 30000 $)**	**Total**
Compra el producto	18	20	38
No compra el producto	42	20	62
Total	60	40	100

¿Son independientes los sucesos Comprador e Ingresos altos?. El porcentaje de compradores, ¿es igual entre las familias con ingresos bajos y las de ingresos elevados?.

- **ESTUDIO INMOBILIARIO**

Se llevó a cabo un estudio entre los lectores de una revista. Los resultados indicaron que el 60% de los lectores eran propietarios de sus casas y tenían ingresos superiores a 25000 $ por año; el 20% eran dueños de sus casas pero sus ingresos eran menores de 25000 $; el 10% tenían ingresos mayores de 25000 $ pero no eran dueños de sus casas; y el 10% restante no eran dueños de sus casas ni tenían ingresos mayores de 25000 $.

a) Seleccionamos al azar un lector de esta revista y sabemos que es propietario de su casa. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga ingresos superiores a 25000 $?.

b) ¿Son independientes los sucesos "ser propietario" y "tener ingresos superiores a 25000 $"?.

- **HÁBITOS TELEVISIVOS**

Se realizó una encuesta de familias en una zona urbana y en el área suburbana circundante. Las familias se clasificaron de acuerdo con sus hábitos de ver o no dos programas de televisión. Los datos obtenidos son los siguientes:

	Ve el programa A		No ve el programa A		
	Urbano	Suburbano	Urbano	Suburbano	Total
Ve el programa B	10%	14%	5%	1%	30%
No ve el programa B	15%	21%	20%	14%	70%
Total	25%	35%	25%	15%	100%

a) Si se selecciona al azar una familia de este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que vea ambos programas?.

b) Si la familia seleccionada ve el programa A, ¿cuál es la probabilidad de que también vea el programa B?.

c) ¿Son independientes los sucesos "ve el programa A" y "ve el programa B"?.

d) El suceso "ve el programa B", ¿es independiente del suceso "urbano"?.

e) Considera el suceso "ve cualquiera de los programas o ambos". ¿Es independiente del suceso "urbano"?.

- **DIAGNÓSTICO**

El 12% de los habitantes de un país padece cierta enfermedad. Para el diagnóstico de esta, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 90% de los casos de personas realmente enfermas, pero también da positivo en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que el procedimiento le ha dado positivo?.

- **BENEFICIOS BURSÁTILES**

Se estima que sólo un 20% de los que compran acciones en Bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos el 80% obtiene beneficios. De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles sólo un 10% obtienen beneficios. Se desea saber:

a) El tanto por ciento de los que compran acciones en Bolsa que obtienen beneficios.

b) Si se elige al azar una persona que ha comprado acciones en la Bolsa y resulta que ha obtenido beneficios, ¿cuál es la probabilidad de que tenga conocimientos bursátiles?.

- **BOLAS**

Tenemos dos máquinas A y B que producen bolas de dos colores (rojo y verde). La máquina A produce un 90% de bolas rojas y un 10% de verdes; la B, un 80% de rojas y un 20% de verdes. La máquina A produce el triple de bolas que B. Se van almacenando en una misma urna las bolas producidas por A y B.

a) Se extrae una bola de la urna y es verde. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A?.

b) Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?.

ÁRBOLES Y DECISIONES EN ESO Y BACHILLERATO

Introducción

La teoría bayesiana de la decisión trata problemas de toma de decisiones en ambientes de incertidumbre. Hemos de seleccionar únicamente una decisión y la selección hemos de hacerla antes de conocer cuál de los posibles sucesos ocurrirá.

La teoría bayesiana, conocida como análisis bayesiano, está basada en el Teorema de Bayes y en el teorema de la probabilidad total. Estos teoremas se pueden explicar muy bien con la ayuda de diagramas de árbol y tablas de contingencia.

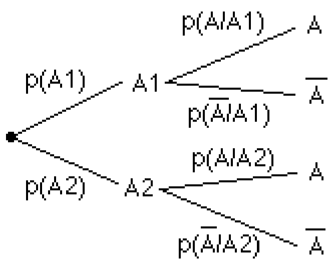
En las siguientes actividades analizaremos los teoremas de Bayes y de la probabilidad total y los utilizaremos, junto con los árboles de decisión para resolver problemas de decisión.

1. Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes

- **TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES**

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sean A_1 y A_2 dos sucesos incompatibles, cuya unión es el espacio muestral, es decir, $A_1 \cap A_2=\emptyset$, $A_1 \cup A_2=E$. Sea A un suceso cualquiera.



A la vista del diagrama de árbol, se cumple que

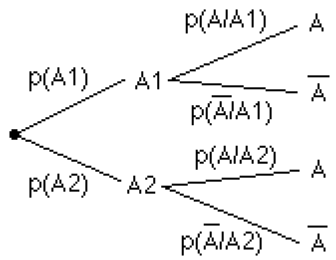
$$p(A) = p(A \cap A_1)+p(A \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A/A_1) + p(A_2) \cdot p(A/A_2)$$

*Este resultado se conoce como **teorema de la probabilidad total**, que afirma lo siguiente:*

Si A_1 y A_2 son dos sucesos tales que $A_1 \cap A_2=\emptyset$, $A_1 \cup A_2=E$, la probabilidad de cualquier suceso A es: $p(A) = p(A_1) \cdot p(A/A_1) + p(A_2) \cdot p(A/A_2)$

TEOREMA DE BAYES

Sean A_1 y A_2 dos sucesos incompatibles, cuya unión es el espacio muestral, es decir, $A_1 \cap A_2=\emptyset$, $A_1 \cup A_2=E$. Sea A un suceso cualquiera.



Observando el diagrama de árbol y usando el teorema de la probabilidad total, se cumple que :

$$p(A_1 / A)= \frac{p(A \cap A_1)}{p(A)} = \frac{p(A_1) \cdot p(A / A_1)}{p(A_1) \cdot p(A / A_1) + p(A_2) \cdot p(A / A_2)}$$

$$p(A_2 / A)= \frac{p(A \cap A_2)}{p(A)} = \frac{p(A_2) \cdot p(A / A_2)}{p(A_1) \cdot p(A / A_1) + p(A_2) \cdot p(A / A_2)}$$

Con estas fórmulas podemos obtener la probabilidad de las "causas" A_1 y A_2 sabiendo que ha ocurrido el "efecto" A. Las probabilidades $p(A_1)$ y $p(A_2)$ se llaman **probabilidades a priori** *o subjetivas, y las probabilidades $p(A_1/A)$ y $p(A_2/A)$ se llaman* **probabilidades a posteriori**.

El **teorema de Bayes** *afirma que:*

Si A_1 y A_2 son dos sucesos tales que $A_1 \cap A_2=\emptyset$, $A_1 \cup A_2=E$ y A es un suceso cualquiera, se cumple:

$$p(A_i / A) = \frac{p(A_i) \cdot p(A / A_i)}{p(A_1) \cdot p(A / A_1) + p(A_2) \cdot p(A / A_2)} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Este teorema afirma que si se sospecha que A_1 y A_2 son posibles causas del suceso A, y conocemos las probabilidades a priori, podemos determinar la probabilidades a posteriori, es decir las probabilidades de que las causas sean, efectivamente, A_1 y A_2, sabiendo que el efecto es el suceso A.

Tanto el teorema de Bayes como el teorema de la probabilidad total, pueden generalizarse a cualquier número de sucesos A_1, A_2, ..., A_n con la condición de que sean incompatibles dos a dos y su unión sea el espacio muestral,

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j \qquad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$$

La formulación más general del <u>teorema de la probabilidad total</u> es la siguiente:

Si los sucesos A_i forman una partición (o sistema completo de sucesos) de E, es decir, si $A_i \cap A_j = \Phi$ y $\bigcup_i A_i = E$, entonces, la probabilidad de cualquier suceso A viene dada por la expresión:

$$p(A) = \sum_i p(A_i) \cdot p(A / A_i)$$

La formulación general del <u>teorema de Bayes</u> es la siguiente:

> ***Si los sucesos A_i forman una partición (o sistema completo de sucesos) de E, es decir, si $A_i \cap A_j = \Phi$ y $\bigcup_i A_i = E$, y A es un suceso cualquiera, entonces, las probabilidades a posteriori son:***
>
> $$p(A_i / A) = \frac{p(A_i) \cdot p(A / A_i)}{\sum_i p(A_i) \cdot p(A / A_i)}$$

- **<u>ESTUDIO Y TRABAJO</u>**

Una encuesta revela que el 30% de la población tiene estudios, de los cuales el 12% no tiene trabajo. Del 70% que no tiene estudios, un 25% no tiene trabajo. Determina razonadamente:

a) El tanto por ciento de la población que no tiene trabajo.

b) La probabilidad de que tenga estudios una persona elegida al azar entre las que tienen trabajo.

c) La probabilidad de que tenga estudios una persona elegida al azar entre las que no tienen trabajo.

- **<u>MÁQUINAS</u>**

Una fábrica tiene tres máquinas, A, B y C, que producen tornillos. Del total de tornillos se producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20%.

La máquina A produce un 5% de tornillos defectuosos, la B un 4% y la C, un 2%.

a) Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina C.

- **<u>BOLSAS</u>**

Tenemos tres bolsas con bolas blancas y negras. En la bolsa 1 hay 10 bolas blancas y ninguna negra; en la bolsa 2 hay 4 bolas blancas y 6 negras; y en la bolsa 3 hay 5 bolas blancas y 5 negras. De una de las tres bolsas, elegida al azar, se extraen dos bolas con reemplazamiento que resultan ser una blanca y una negra (no sabemos en qué orden).

Si las probabilidades a priori de las tres bolsas eran iguales a $1/3$:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa elegida sea la A?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa elegida sea la B?.

c) ¿Y de que sea la C?.

- **VACACIONES DE VERANO**

El 25% de las familias de cierta comunidad autónoma no sale fuera de la misma durante las vacaciones de verano. El 65% veranea por el resto de España y el 10% restante se va al extranjero. De los que se quedan en su comunidad, sólo un 10% no utiliza el coche en sus desplazamientos. Esta cantidad aumenta al 30% entre los que salen por el resto de España, y al 90% entre los que viajan al extranjero.

a) Calcula el porcentaje de familias de esa comunidad que utiliza el coche en sus desplazamientos de vacaciones de verano.

b) Una familia no usa coche en sus vacaciones de verano. ¿Cuál es la probabilidad de que salga de su comunidad moviéndose por el resto de España?.

- **CAJAS Y MONEDAS**

Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla y, en cada caja, hay una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble que la probabilidad de salga cruz; la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcula razonadamente:

a) La probabilidad de que salga cara.

b) La probabilidad de que, sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

2. Árboles de decisión

Nos encontramos ante un problema de decisión cuando hemos de elegir entre dos o más formas de actuar. La Teoría Bayesiana de la Decisión trata problemas de toma de decisión bajo condiciones de incertidumbre.

- **ESTRUCTURA DE UN PROBLEMA DE DECISIÓN**

Comenzamos con dos ejemplos:

1) Se va a hacer un concierto de rock en el instituto. El día del concierto amanece nublado, lo que hace suponer lluvia: el organizador del concierto ha de plantearse la cuestión de realizar el concierto en el patio o en el salón de actos.

2) Un comerciante compra un producto en contenedores por un importe de 400 euros cada uno i los vende a 700 euros. Este producto es perecedero y tiene una duración de un día. Basándose en su experiencia piensa que la demanda estará entre 1 y 4 contenedores diarios. El comerciante ha de decidir el número de contenedores que quiere pedir.

Con estos ejemplos analizaremos los elementos que componen un problema de decisión:

a) En un problema de decisión hay una persona (o comisión) que decide, y que llamaremos decisor: en el ejemplo (1) el decisor es el organizador del concierto y en el (2) el decisor es el comerciante.

b) El decisor ha de elegir entre dos o más formas de actuar, que llamaremos decisiones; en el ejemplo (1) el decisor ha de elegir entre las decisiones:

D_1= concierto en el patio

D_2= concierto en el salón de actos.

En el ejemplo (2) el comerciante ha de elegir entre:

D_1= comprar 1 contenedor por día.

D_2= comprar 2 contenedores por día.

D_3= comprar 3 contenedores por día.

D_4= comprar 4 contenedores por día.

En un problema de decisión, las decisiones deben ser excluyentes, es decir, no es posible elegir dos decisiones simultáneamente.

c) Independientemente de la decisión que tome el decisor ocurrirá uno de entre varios sucesos aleatorios; en el ejemplo (1) habrán los sucesos:

S_1= llueve

S_2= no llueve

y en el ejemplo (2) los sucesos aleatorios serán:

S_1= demanda de 1 contenedor

S_2= demanda de 2 contenedores

S_3= demanda de 3 contenedores

S_4= demanda de 4 contenedores

En un problema de decisión los sucesos que intervienen deben ser mútuamente excluyentes, es decir si uno de ellos ocurre no puede ocurrir ninguno de los otros.

d) Las parejas formadas por las decisiones y los sucesos aleatorios constituyen las consecuencias posibles que representamos por $C_{i\,j}=(D_i, S_j)$.

En el ejemplo (1) tendremos:

$C_{1\,1}$= se hace la fiesta en malas condiciones

$C_{1\,2}$= comodidad

$C_{2\,1}$= ligera incomodidad; gente contrariada, pero satisfecha por la realización del concierto.

$C_{2\,2}$= ligera incomodidad; gente contrariada que lamenta la decisión tomada.

En el ejemplo (2) tendremos:

$C_{1\,1}$= 1×700–1×400=300 euros; el comerciante compra un contenedor y hay una demanda de un contenedor.

$C_{2\,1}$= 1×700–2×400= –100 euros; el comerciante ha comprado 2 contenedores pero la demanda es solamente de uno.
…………………………………………………..

Análogamente calcularíamos el resto de consecuencias.

e) Todos los conceptos estudiados hasta ahora podemos resumirlos en una tabla muy intuitiva, denominada tabla de decisión:

Para el ejemplo (1) tenemos:

Decisiones	Sucesos aleatorios	
	S_1= llueve	S_2= no llueve
D_1= concierto en el patio	$C_{1\,1}$= se hace la fiesta en malas condiciones	$C_{1\,2}$= comodidad
D_2= concierto en el salón de actos	$C_{2\,1}$= ligera incomodidad; gente contrariada; satisfacción por la decisión	$C_{2\,2}$= ligera incomodidad; Se lamenta la decisión

Para el ejemplo (2) tenemos:

Cantidad de contenedores encargados	Sucesos aleatorios. Demanda del mercado en número de contenedores			
	S_1=1	S_2=2	S_3=3	S_4=4
D_1=1	300	300	300	300
D_2=2	–100	600	600	600
D_3=3	–500	200	900	900
D_4=4	–900	–200	500	1200

En resumen, dadas las decisiones D_1, D_2, … mutuamente excluyentes y los sucesos aleatorios S_1, S_2, … mutuamente excluyentes, el problema de decisión consiste en elegir una única decisión sin saber cuál de los sucesos aleatorios ocurrirá. Con esto obtendremos una tabla de decisión como la siguiente:

Decisiones	Sucesos aleatorios			
	S_1	S_2	…	S_n
D_1	$C_{1\,1}$	$C_{1\,2}$	…	$C_{1\,n}$
D_2	$C_{2\,1}$	$C_{2\,2}$	…	$C_{2\,n}$
…	…	…	…	…
D_m	$C_{m\,1}$	$C_{m\,2}$	…	$C_{m\,n}$

- **PROBABILIDADES**

Los sucesos aleatorios que intervienen en un problema de decisión son mutuamente excluyentes dos a dos y su unión es el suceso seguro. Por tanto, verifican las propiedades:

$$0 \le p(S_i) \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} p(S_i) = 1$$

Supongamos que en el ejemplo (1), el organizador del concierto asigna las probabilidades $p(S_1) = 0'7$, $p(S_2) = 0'3$. Entonces la tabla de decisión sería la siguiente:

Decisiones	Sucesos aleatorios	
	S_1= llueve	S_2= no llueve
D_1= concierto en el patio	$C_{1\,1}$= se hace la fiesta en malas condiciones	$C_{1\,2}$= comodidad
D_2= concierto en el salón de actos	$C_{2\,1}$= ligera incomodidad; gente contrariada; satisfacción por la decisión	$C_{2\,2}$= ligera incomodidad; Se lamenta la decisión
Probabilidades	$p(S_1)=0'7$	$p(S_2)=0'3$

En el ejemplo (2) suponemos que el comerciante asigna las probabilidades: $p(S_1)=0'2$, $p(S_2)=0'4$, $p(S_3)=0'3$, $p(S_4)=0'1$. Entonces la tabla de decisión será:

Cantidad de contenedores encargados	Sucesos aleatorios. Demanda del mercado en número de contenedores			
	S_1=1	S_2=2	S_3=3	S_4=4
D_1=1	300	300	300	300
D_2=2	–100	600	600	600
D_3=3	–500	200	900	900
D_4=4	–900	–200	500	1200
Probabilidades	$p(S_1)=0'2$	$p(S_2)=0'4$	$p(S_3)=0'3$	$p(S_4)=0'1$

- **TEORÍA DE LA UTILIDAD**

Dado un problema de decisión, el decisor tendrá sus preferencias entre las posibles consecuencias. Designaremos por C la consecuencia más preferida y c la menos preferida. De esta forma, el decisor puede ordenar las consecuencias, de acuerdo con sus preferencias de mayor a menor.

Para un decisor, la utilidad $U(C_{i\,j})$ de una consecuencia $C_{i\,j}$ es la probabilidad p para la cual es igualmente deseable la consecuencia $C_{i\,j}$ que una papeleta que le da derecho a participar en una lotería en que puede ganar C con probabilidad p y ganar c con probabilidad 1–p.

De esta definición deducimos las siguientes propiedades:

1) Como $U(C_{i\,j})=p$ es una probabilidad, se cumplirá $0\leq U(C_{i\,j})\leq 1$ y podemos aplicar todas las propiedades de las probabilidades.

2) Como C es tan deseable como una papeleta de lotería en que podemos ganar C con probabilidad 1 y c con probabilidad 0, tendremos que U(C)=1 y U(c)=0.

3) Si $C_{i\,j}$ es una consecuencia preferida a otra $C_{k\,h}$ entonces $U(C_{i\,j})<U(C_{k\,h})$.

4) La utilidad es subjetiva y temporal.

La función de utilidad aplica el conjunto de las consecuencias en el intervalo cerrado [0, 1]. Esta función mide las preferencias del decisor entre las consecuencias. Con el concepto de utilidad, la tabla que sintetiza el problema de decisión es:

Decisiones	Sucesos aleatorios			
	$U(S_1)$	$U(S_2)$	…	$U(S_n)$
D_1	$U(C_{1\,1})$	$U(C_{1\,2})$	…	$U(C_{1\,n})$
D_2	$U(C_{2\,1})$	$U(C_{2\,2})$	…	$U(C_{2\,n})$
…	…	…	…	…
D_m	$U(C_{m\,1})$	$U(C_{m\,2})$	…	$U(C_{m\,n})$
Probabilidades	$p(S_1)$	$p(S_2)$		$p(S_n)$

En el ejemplo (1) del concierto se cumple que $U(C_{1\,2})=1$ y $U(C_{1\,1})=0$, evidentemente. Imaginemos ahora la siguiente papeleta de lotería:

Papeleta que da derecho a participar en una loteria con prob. 0'6 de ganar C y prob. 0'4 de ganar c	**0'6**

Si esta papeleta es tan deseable como $C_{2\,1}$, tendremos $U(C_{2\,1})=0'6$. Análogamente el decisor podría asignar $U(C_{2\,2})=0'2$. Finalmente, la tabla de decisión sería:

Decisiones	Sucesos aleatorios	
	S_1= llueve	S_2= no llueve
D_1= concierto en el patio	0	1
D_2= concierto en el salón de actos	0'6	0'2
Probabilidades	$p(S_1)=0'7$	$p(S_2)=0'3$

Podemos suponer también que la tabla de decisión del ejemplo (2), incluyendo las utilidades es la siguiente:

Cantidad de contenedores encargados	Sucesos aleatorios. Demanda del mercado en número de contenedores			
	$S_1=1$	$S_2=2$	$S_3=3$	$S_4=4$
$D_1=1$	0'85	0'85	0'85	0'85
$D_2=2$	0'65	0'95	0'95	0'95
$D_3=3$	0'40	0'80	0'97	0'97
$D_4=4$	0	0'60	0'90	1
Probabilidades	$p(S_1)=0'2$	$p(S_2)=0'4$	$p(S_3)=0'3$	$p(S_4)=0'1$

- **<u>CRITERIO DE DECISIÓN BAYESIANO</u>**

Asignamos a cada decisión D_i, $1\le i\le n$, un número $E(D_i)$ llamado utilidad esperada de D_i, que viene dada por la expresión:

$$E(D_i)=\sum_{j=1}^{n} U(C_{i\,j})\cdot p(S_j)$$

El criterio bayesiano de decisión consiste en elegir la decisión que tenga mayor utilidad esperada.

Veamos cuál sería la decisión mejor desde el punto de vista bayesiano en los dos ejemplos que estamos estudiando:

1) En el ejemplo del organizador del concierto tendremos:

Decisiones	Sucesos aleatorios	
	S_1= llueve	S_2= no llueve
D_1= concierto en el patio	0	1
D_2= concierto en el salón de actos	0'6	0'2
Probabilidades	$p(S_1)$=0'7	$p(S_2)$=0'3

de donde podemos deducir:

$$E(D_1)=0\times 0'7+1\times 0'3=0'3$$
$$E(D_2)=0'6\times 0'7+0'2\times 0'3=0'48$$

Así pues, el organizador del concierto decidirá hacer el concierto en el salón de actos.

2) En el ejemplo del comerciante tendremos:

Cantidad de contenedores encargados	Sucesos aleatorios. Demanda del mercado en número de contenedores			
	S_1=1	S_2=2	S_3=3	S_4=4
D_1=1	0'85	0'85	0'85	0'85
D_2=2	0'65	0'95	0'95	0'95
D_3=3	0'40	0'80	0'97	0'97
D_4=4	0	0'60	0'90	1
Probabilidades	$p(S_1)$=0'2	$p(S_2)$=0'4	$p(S_3)$=0'3	$p(S_4)$=0'1

de donde podemos deducir:

$$E(D_1)=0'85\times 0'2+0'85\times 0'4+0'85\times 0'3+0'85\times 0'1=0'85$$

$$E(D_2)=0'65\times 0'2+0'95\times 0'4+0'95\times 0'3+0'95\times 0'1=0'89$$

$$E(D_3)=0'4\times 0'2+0'8\times 0'4+0'97\times 0'3+0'97\times 0'1=0'788$$

$$E(D_4)=0\times 0'2+0'6\times 0'4+0'9\times 0'3+1\times 0'1=0'61$$

Así pues, el comerciante elegirá la decisión D_2= demandar dos contenedores.

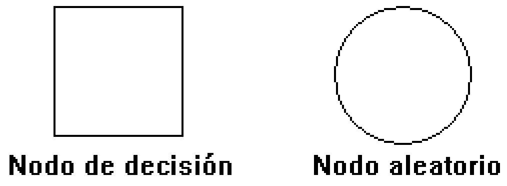
- **ÁRBOLES DE DECISIÓN**

A veces el conjunto de los sucesos aleatorios no es el mismo sea la que sea la decisión tomada y, entonces, para resolver y representar los problemas de decisión utilizaremos los denominados árboles de decisión.

Un árbol de decisión es un diagrama del problema de decisión que ha de resolver el decisor. Se caracteriza por unos puntos de ramificación denominados nodos que pueden ser de dos tipos:

Tipo 1: Nodo de decisión.– Se representa por un cuadrado y de este salen las decisiones de un determinado problema.

Tipo II: Nodo aleatorio.– Se representa por un círculo y de este salen los sucesos aleatorios.



Después de haber dibujado el diagrama lo emplearemos para analizar un problema de decisión aplicando las siguientes reglas:

a) Asignar utilidades a los puntos terminales del árbol.

b) Asignar probabilidades a los sucesos aleatorios.

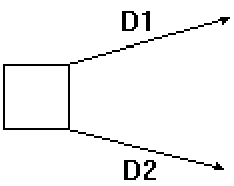
c) Calcular de derecha a izquierda la utilidad esperada en cada nodo aleatorio y elegir la mayor utilidad esperada en cada nodo de decisión.

Ejemplo 1.– Supongamos que nos ofrecen participar en el juego siguiente: lanzamos un dado al aire. Si sale un número par ganamos 10 euros y si sale impar perdemos 3 euros. Supongamos que la utilidad monetaria es proporcional al dinero. Así tenemos las decisiones:

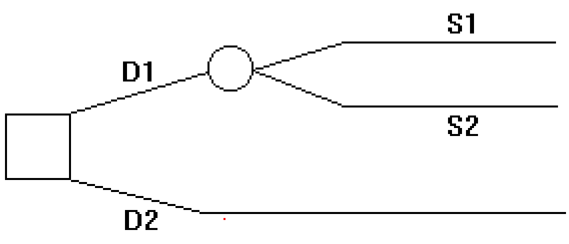
D_1= jugar

D_2= no jugar

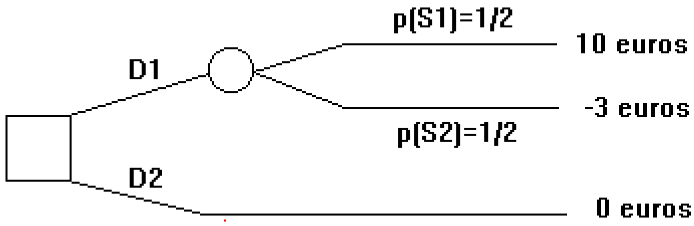
Por tanto, el primer punto de ramificación del árbol de decisión comienza en un nodo de decisión:



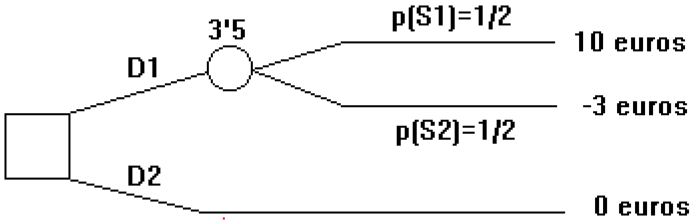
Si elegimos D_1, los sucesos aleatorios, que serán S_1= sale número par y S_2= sale número impar, condicionarán la cuantía de las consecuencias. Si elegimos D_2 ésta es independiente de los sucesos aleatorios. El árbol, pues, presentará la siguiente estructura:



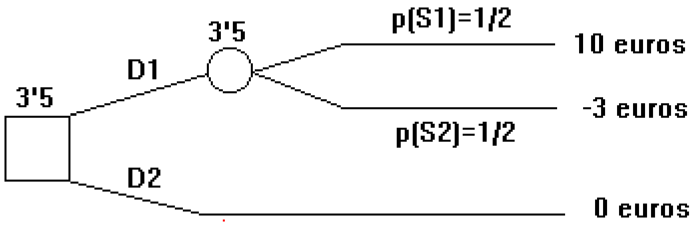
Suponiendo que el dado no está cargado, las probabilidades de los sucesos serán: $p(S_1)=1/2$, $p(S_2)=1/2$. Aplicando las reglas (a) y (b), tenemos:



Y aplicando la regla (c): 10×1/2+(–3)×1/2=5–1'5=3'5



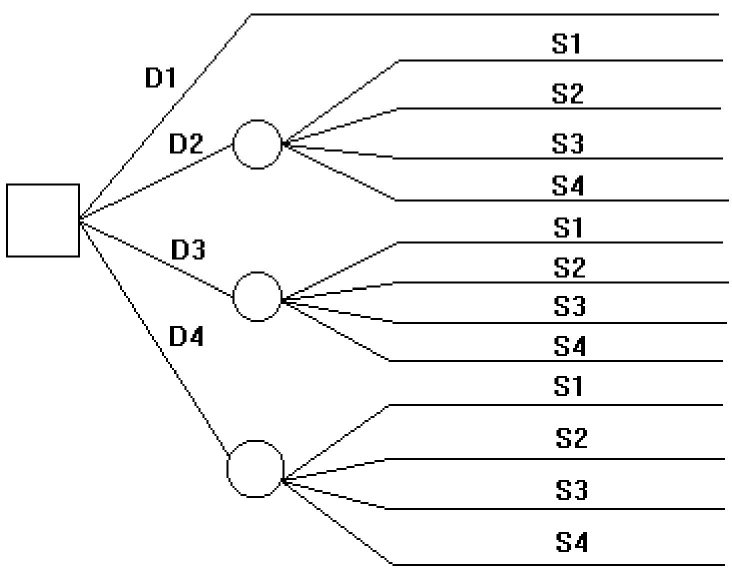
Finalmente, la mayor utilidad esperada la escribiremos sobre el nodo de decisión que provenga de la rama de decisión con el valor esperado más alto. El diagrama definitivo queda de la siguiente forma:



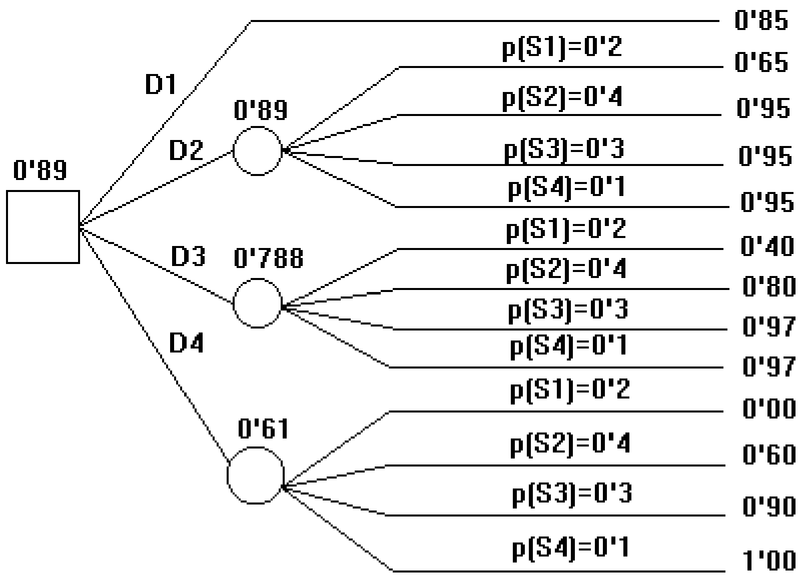
Ejemplo 2.– En el ejemplo del comerciante que hemos estudiado antes, la tabla de decisión es:

Cantidad de contenedores encargados	Sucesos aleatorios. Demanda del mercado en número de contenedores			
	$S_1=1$	$S_2=2$	$S_3=3$	$S_4=4$
$D_1=1$	0'85	0'85	0'85	0'85
$D_2=2$	0'65	0'95	0'95	0'95
$D_3=3$	0'40	0'80	0'97	0'97
$D_4=4$	0	0'60	0'90	1
Probabilidades	$p(S_1)=0'2$	$p(S_2)=0'4$	$p(S_3)=0'3$	$p(S_4)=0'1$

Si elegimos D_1 la ganancia es fija porque es independiente de los sucesos aleatorios que ocurran. Si elegimos D_2, D_3 o D_4 los sucesos aleatorios condicionan la cuantía de la ganancia, es decir, de las consecuencias. El árbol de decisión será:



Observando las reglas (a), (b) y (c), y tomando los datos de la tabla, el problema se resuelve fácilmente:



- **<u>ANÁLISIS BAYESIANO</u>**

Una persona acude a una granja avícola para ocupar el puesto de experto en separar los pollos de las gallinas desde su nacimiento. Naturalmente será sometido a una prueba para verificar su profesionalidad, es decir para desechar la hipótesis nula H_0: la probabilidad de acertar es p=1/2, y aceptar en cambio H_1: la probabilidad de acertar es p>1/2. El aspirante procede de una escuela que, por experiencia, sabemos produce dos tipos de especialistas:

Un 30% que tienen una probabilidad de acertar p=0'7

Un 70% que tienen una probabilidad de acertar p=0'9

Hemos fijado así las "probabilidades a priori", en cierto modo subjetivas, ya que nuestra experiencia puede ser parcial. Las indicaremos por P_o. Así que:

P_o (p=0'7) = 0'30 P_o (p=0'9) = 0'70

Observa que p es ahora una variable aleatoria.

En 10 pruebas, el aspirante obtiene 9 aciertos. ¿Debemos admitirlo en el empleo?.

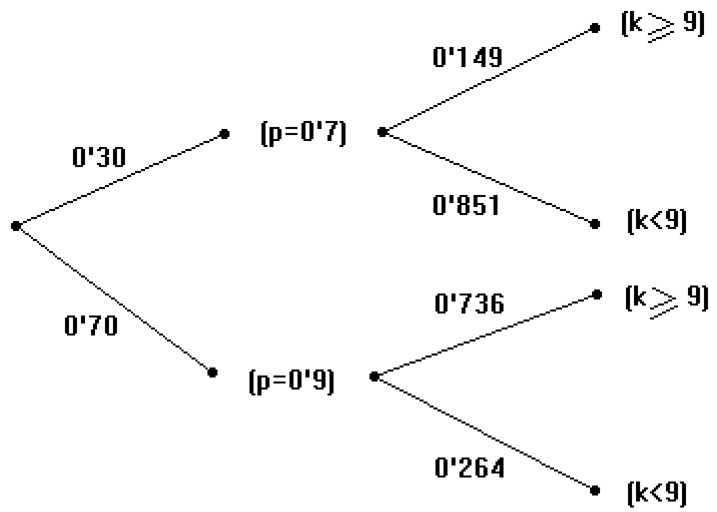
La probabilidad de obtener, al menos, estos éxitos en cada una de las hipótesis es:

$$P(k \geq 9/p = 0'7) = \binom{10}{9} 0'7^9 \cdot 0'3 + \binom{10}{10} 0'7^{10} \approx 0'149$$

$$P(k \geq 9/p = 0'9) = \binom{10}{9} 0'9^9 \cdot 0'1 + \binom{10}{10} 0'9^{10} \approx 0'736$$

Estas probabilidades se suelen llamar "verosimilitudes".

En el siguiente diagrama se recogen los resultados anteriores:



Pero estamos interesados justamente en otras probabilidades:

Que la persona en cuestión tenga una probabilidad de aciertos 0'7 o 0'9, después que ha realizado las 10 pruebas; hay pues que calcular las probabilidades:

$$P(p = 0'7 / k \geq 9) \text{ y } P(p = 0'9 / k \geq 9)$$

llamadas "probabilidades a posteriori", y simbolizadas por P_1(p=0'7) y P_1(p=0'9), respectivamente.

Para obtenerlas, hay que calcular las "probabilidades conjuntas":

$$P(p = 0'7 \text{ y } k \geq 9) \text{ y } P(p = 0'9 \text{ y } k \geq 9),$$

ya que entonces es:

$$P_1\left(p=0'7\right)=\frac{P\left(p=0'7 \text{ y } k\geq 9\right)}{P\left(k\geq 9\right)} \qquad P_1\left(p=0'9\right)=\frac{P\left(p=0'9 \text{ y } k\geq 9\right)}{P\left(k\geq 9\right)}$$

Puedes comprobar que se tiene:

$$P\left(p=0'7 \text{ y } k\geq 9\right)=0'30\cdot 0'149\approx 0'045$$

$$P\left(p=0'9 \text{ y } k\geq 9\right)=0'70\cdot 0'736\approx 0'515$$

$$P\left(k\geq 9\right)\approx 0'045+0'515=0'550$$

$$P_1\left(p=0'7\right)\approx 0'08\,, \qquad P_1\left(p=0'9\right)\approx 0'92$$

Resultado que da una gran probabilidad a la hipótesis (p=0'9) frente a la (p=0'7): 92 sobre 8.

Si ahora se realizaran 10 nuevas pruebas, las dos probabilidades anteriores las tomaríamos como probabilidades a priori y calcularíamos las nuevas probabilidades a posteriori. De este modo, los resultados de cada experiencia se incorporan como datos para el análisis de futuras experiencias. Supongamos que ha obtenido 8 éxitos en 10 nuevas pruebas. Las verosimilitudes son ahora:

$$P\left(k\geq 8\,/\,p=0'7\right)=\binom{10}{8}0'7^{8}\cdot 0'3^{2}+\binom{10}{9}0'7^{9}\cdot 0'3+\binom{10}{10}0'7^{10}=0'38$$

$$P\left(k\geq 8\,/\,p=0'9\right)=\binom{10}{8}0'9^{8}\cdot 0'1^{2}+\binom{10}{9}0'9^{9}\cdot 0'1+\binom{10}{10}0'9^{10}=0'93$$

y la probabilidad conjunta:

$$P\left(k\geq 8 \text{ y } p=0'7\right)=0'08\cdot 0'38\approx 0'03$$

$$P\left(k\geq 8 \text{ y } p=0'9\right)=0'92\cdot 0'93\approx 0'86$$

Luego las probabilidades a posteriori son ahora:

$$P_1\left(p=0'7\right)=\frac{0'03}{0'03+0'86} \qquad P_1\left(p=0'9\right)=\frac{0'86}{0'03+0'86}$$

Con lo que ahora la proporción entre ambas probabilidades es de 86 sobre 3.

ACTIVIDADES

- **CAMPO O CINE**

Un domingo hemos de decidir entre ir al campo o quedarnos en la ciudad e ir al cine. Puede ocurrir que salga el sol o que llueva. Si nos quedamos en la ciudad, haga el tiempo que haga, tendremos una utilidad 0'6. Calcula la probabilidad de que salga soleado, a partir de la cual cambiaríamos de decisión.

- **INVERSIÓN**

Un inversor dispone de 5000 euros. Puede invertirlos en una libreta de ahorro a plazo fijo, deuda pública, valores de primera clase o valores especulativos en bolsa. Si la tabla de decisión es la siguiente, ¿dónde debe invertir?.

Decisiones	Sucesos aleatorios		
	Recesión S_1	Estabilidad S_2	Expansión S_3
D_1=libreta de ahorro	500	500	500
D_2=deuda pública	650	750	800
D_3=valores 1ª clase	–1000	150	1500
D_4=valores especulativos	–1500	1000	2000
Probabilidades	$P(S_1)=0'2$	$P(S_2)=0'5$	$P(S_3)=0'3$

- **RATAS**

Analizando el color de la piel de 24 ratas agutí se ha observado la proporción 2:1 entre las de color amarillo y las grisáceas. ¿Crees que hay motivos para sospechar que hay un gen letal, es decir que la proporción es realmente 2:1 y no 3:1, como ocurre normalmente?. ¿Ha sido casual la relación encontrada?. Haz un análisis bayesiano, teniendo en cuenta que suele aparecer bastante más veces la proporción 3:1 que la 2:1, por lo que puedes asignar, por ejemplo una probabilidad a priori del 80% para la primera proporción y 20% para la segunda.

- **CAJAS**

Dos cajas, A y B, difieren únicamente en sus contenidos: La primera contiene 4 bolas negras y 6 blancas; la segunda contiene 6 bolas negras y 4 blancas. Elegimos una caja al azar y obtenemos el resultado que se indica en cada caso, al extraer una bola sucesivamente, devolviéndola cada vez a la caja:

a) B N N N N
b) B N N N B N
c) N N N N N N N N N N
d) 15 N y 5 B (no se especifica el orden)

¿Qué caja se ha elegido en cada caso?. Haz un análisis bayesiano de la cuestión, suponiendo que se han obtenido sucesivamente los resultados (a), (b), (c) y (d) con la caja elegida inicialmente.

- **AUTOMÓVIL**

De una partida de piezas de automóvil se analiza una muestra, elegida por sorteo, de 20 piezas, encontrándose que 5 son defectuosas. ¿Qué porcentaje de piezas defectuosas hay en toda la partida?. Haz un análisis bayesiano, suponiendo que en análisis anteriores de otras partidas semejantes, el porcentaje de piezas defectuosas era del 5%.